AHU-Mathematical-Statistics

Notes I made during undergraduate

Categories: Mathematics

Tags: Probability and Statistics

一开始复习概率论：γ分布 β分布
考 不考

绪论 概率看

Mar 5, 2024

Apr 11, 2024 Review

pdf 1 最大似然估计
矩估计
无偏性

3. 参数估计的方法（点估计）　《估计的结果是什么？是点、就是点估计。区间 区间估计。

估计问题的提出：X 随机变量（总体）　$F(x,\vec{\theta})$ 分布函数　其中 $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_m)$ 是未知参数向量

$\vec{\theta}$ 的所有可能取值构成集合 $\Theta \subset R^m$ 参数空间　$g(\vec{\theta})$ 是 $\vec{\theta}$ 的实值函数　$\{0\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ 1\}$

从总体中抽取样本 ~~$x_1, x_2,$~~ $\to (X_1, X_2, \cdots, X_n)$

其观测值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$　如何由观测值估计出 $g(\theta)$ 的值？（估计问题的提法）

$\vec{\theta}$ 的估计值记为 $\hat{\vec{\theta}}=(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_m)$

点估计（方法）$\begin{cases} \text{最大似然估计 (似)} & \text{Maximum Likehood Estimate (MLE)}\ \hat{\theta}_{MLE} \\ \text{矩估计} & \text{Moment Estimate} \end{cases}$

计算题

一、最大似然估计（概率最大）

想法：概率最大原则　$\underline{A}$　B　C　$F(x;\theta)$　$\hat{\theta}$

1. 离散型总体

X 离散型总体　$f(x,\vec{\theta}) = P(X=x)$ 概率分布函数（分布列）　现估计参数 $\vec{\theta}$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本，其观测值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

则认为 $P((X_1, X_2, \cdots X_n)=(x_1, x_2, \cdots, x_n))$ 最大

$p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$ 这个点

~~$P(X_1, X_2, X_n) = P(x_1, x_2, \cdots x_n)$~~　$P((X_1, X_2, \cdots X_n)=(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = P(X_1=x_1, X_2=x_2, \cdots, X_n=x_n)$

$\prod_{k=1}^{n} P(X_k=x_k)$

独立性 $= \prod_{k=1}^{n} P(X_k=x_k)$

同分布 $= \prod_{k=1}^{n} P(X=x_k)$

代表性 $= \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\vec{\theta})$　样本的联合分布列 或 似然函数

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 把 θ 看成参数　把 x 看成参数 则 L 是 θ 的函数 即样本的似然函数

记 $L(\vec{\theta}) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \vec{\theta}) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\vec{\theta})$ 称 $L(\vec{\theta})$ 为似然函数

若 $\hat{\vec{\theta}} = \vec{\varphi}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ s.t. ~~$L(x_1, x_2, \cdots, x_n)$~~

$$L(x_1, x_2, \cdots x_n; \hat{\vec{\theta}}) = \sup_{\vec{\theta}\in\Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \vec{\theta}).$$

~~即是 θ 的 MLE~~.

$\hat{\theta}$ 各分量 → θ 相应分量

则称 $\hat{\vec{\theta}}$ 为 $\vec{\theta}$ 的最大似然估计

~~$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_m)$~~

[例] 假设盒中白、黑共3只球，有放回地取三次，结果为（黑，白，黑），求盒中黑球占比 θ 的 MLE.

参数空间 $(1,0,1)$

解. $\vec{\theta} \in \Theta$ $\quad \theta \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\} \triangleq \Theta$ 　记第 i 次取出的结果为 $X_i = \begin{cases} 1 & 取出黑球 \\ 0 & 取出白球 \end{cases}$ $i=1,2,3$

则观测结果为 $(1,0,1)$

$P(X_1, X_2, X_3) = (1,0,1)$ (→(此概率要 max)) $= P(X_1=1)P(X_2=0)P(X_3=1)$

$= \theta^2(1-\theta)$ 　　$\theta^2(1-\theta)$

X_i	1	0
P	θ	$1-\theta$

$p = \theta^2(1-\theta)$

即: $L(\theta) = \theta^2(1-\theta)$

(可求导, 若复杂函数, 则先求对数 $L(\theta)$ max点. ⇒ $\ln L(\theta)$ max点).

$\ln L(\theta) = 2\ln\theta + \ln(1-\theta)$

$\ln L(\theta) = 2\ln\theta + \ln(1-\theta)$

$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = \frac{2}{\theta} - \frac{1}{1-\theta} = 0$

$2 - 2\theta = \theta$

$3\theta = 2$

$\theta = \frac{2}{3}$

令 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = \frac{2}{\theta} - \frac{1}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}$ 　且易见. $\theta = \frac{2}{3}$ 为 $L(\theta)$ 的最大值点.
(看二阶导)

从而 $\hat{\theta}_{MLE} = \frac{2}{3}$

$\ln L(\theta)$ 最大值点. $L(\theta)$ 最大值点

2. 连续型总体

分布(离散型)

X: 连续型总体 　$f(x;\vec{\theta})$ 为概率密度函数 (连续型). 　$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本
$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为样本观测值

$P((X_1, X_2, \cdots, X_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)) = 0.$ → (那就考虑观测值附近一邻域)

$\prod_{k=1}^{n} P(X_i = x_i)$. 　单点. 　考虑 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 在邻域 $\prod_{k=1}^{n}(x_k-\delta, x_k+\delta)$ 中的概率

超立方体

$P((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in \prod_{k=1}^{n}(x_k-\delta, x_k+\delta))$
样本.

积分
联合密度函数

$= \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} \cdots \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} f_{联}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$

简单随机样本: 独立性, 代表性.
边缘密度函数的积.

概率分布函数
相互密度函数

$= \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} \cdots \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$

$= \prod_{k=1}^{n} \boxed{\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} f(x_k;\theta)\, dx_k}$ 2δ

故 $= \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in (x_k-\delta, x_k+\delta))$. 　即边际概率的乘积.

$= \prod_{k=1}^{n} \boxed{\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} f(\cancel{x};\theta)\, dx}$

δ较小时

$\approx \prod_{k=1}^{n} 2\delta f(x_k;\theta) \overset{取\ \delta=\frac{1}{2}}{=\!=\!=} \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)$ 　记 $L(\theta) := L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\theta) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)$ 称 $L(\theta)$ 为似然函数

样本的联合密度函数
$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$
形式上与离散型相同

若 $\hat{\theta} \in \Theta$ 　s.t. $L(\hat{\theta}) = \sup_{\theta\in\Theta} L(\hat{\theta})$ 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的 MLE

两点分布

[例] 伯努利分布 $B(1,p)$

X	1	0
p	p	1-p

求 $\hat{p}_{MLE}$.

$\prod_{k=1}^{n} f(x_k;p)$ 　$: p^x(1-p)^{1-x}$

$\varphi = p(1-p)$
$= -p^2 + p$
$-2p + 1 = 0$
$p = \frac{1}{2}$ max
$\hat{p}_{MLE} = \frac{1}{2}$
要乘出现次数!

解: 设样本为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 似然函数 $L(p) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;p)$.

~~$p^k(1-p)^{1-k}$~~ ✓

$f(x,p) = P(X=x) = \begin{cases} p & x=1 \\ 1-p & x=0 \end{cases} = p^x(1-p)^{1-x}$ 　写成这种形式

$x \in \{0,1\}$ 且 $p \in [0,1]$ 为未知参数

故样本观测值为 $(x_1, x_2 \cdots x_n)$
$x_i \in \{0,1\}$ $\forall i = 1,2,\cdots n$

$$L(p)=\prod_{k=1}^{n} p^{x_k}(1-p)^{1-x_k} = p^{\sum_{k=1}^{n}x_k}(1-p)^{n-\sum_{k=1}^{n}x_k} \qquad p\in(0,1).$$

$$\frac{1-p}{p}=\frac{n-\sum_{k=1}^{n}x_k}{\sum_{k=1}^{n}x_k}$$

$$\frac{1}{p}-1=\frac{n-\cancel{Q}+\cancel{Q}}{\sum_{k=1}^{n}x_k}$$

$$p=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}=\bar{x}$$

$$\ln L(p)=\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot\ln p+\left(n-\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\ln(1-p).$$

$$\frac{d}{dp}\ln L(p)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}x_k-\frac{1}{1-p}\left(n-\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=0$$

$\Rightarrow p=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\bar{x}$ 易见 $L(p)$ 在 $\bar{x}$ 取最大值. 从而 $\hat{p}_{MLE}=\bar{X}$ 样本均值

（X 大写：随机变量. $\hat{p}_{MLE}=\bar{x}$ 具体值用小写 x）

[例2] 指数分布 $E(\lambda)$ 设总体 $X\sim E(\lambda)$ 求 $\hat{\lambda}_{MLE}$

生活中～寿命 元件 etc.
不可能负数.

先写似然函数. $L(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\lambda)$ 其实有函数.

无记忆性：
一个东西用了一段时间后的寿命和买回来时候的寿命一样长

$$\left\{\begin{array}{ll}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{array}\right.$$

$L(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\lambda)$

$=\left\{\begin{array}{ll}\lambda^n e^{-\lambda\sum_{1}^{n}x} & x_k>0\\ 0 & \end{array}\right.$

$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{1}^{n}x$

$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{1}^{n}x=0$

$\lambda=\frac{n}{\sum_{1}^{n}x}=\frac{1}{\bar{x}}$

$\Rightarrow Ex=\bar{x}=\frac{1}{\lambda}$

解: $f(x;\lambda)=\left\{\begin{array}{ll}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0.\end{array}\right.$ $\quad f(x;\lambda)=\left\{\begin{array}{ll}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{array}\right.$

$f\left\{\begin{array}{l}\lambda e^{-\lambda x}\\ 0\end{array}\right.$

似然函数 $L(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\lambda)=\left\{\begin{array}{ll}\lambda^n e^{-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k} & x_k>0,\ \forall k=1,2,\cdots,n\\ 0 & \text{其他}.\end{array}\right.$

当 ~~$x_k>0$~~ $L(\lambda)>0$ 时 $\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k \Rightarrow \frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda)=\frac{n}{\lambda}-\sum_{k=1}^{n}x_k=0.$

$\Rightarrow \lambda=$ ~~$\frac{\sum x_k}{n}$~~ $\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}x_k}=\frac{1}{\bar{x}}$

$\Rightarrow \hat{\lambda}_{MLE}=\frac{1}{\bar{x}}$ ~~$\frac{1}{\lambda}$~~

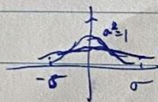
指. $Ex=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{Ex}$

$\Rightarrow \boxed{Ex=p}$ 最大似然

e^{x}

$\lambda e^{-\lambda x}$

[例3] 正态分布 $\left(f(x,\mu,\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}e^{-\frac{1}{2\delta}(x-\mu)^2}\right).$ 参数



面积恒定
拉到周家

$N(\mu,\delta)$ 求 $\hat{\mu}_{MLE}$ $\hat{\delta}_{MLE}$ （$\delta=\sigma^2$）方差

$$f(x,\mu,\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta}}$$

$Ex=\mu.$
$Var(X)=EX^2-(EX)^2=\delta$

$$L(\mu,\delta)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\mu;\delta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\delta^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\delta}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}$$

$$\ln L(\mu,\delta)=n\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{n}{2}\ln\delta-\frac{1}{2\delta}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2$$

省去计算.

令 $\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\delta)=0\\ \frac{\partial}{\partial\delta}\ln L(\mu,\delta)=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\mu=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\bar{x}\\ \delta=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2=S_n^2\end{array}\right.$ 未修正的样本方差.

从而 $\hat{\mu}_{MLE}=\bar{x}$ $\quad\hat{\delta}_{MLE}=\hat{\sigma}^2_{MLE}=S_n^2$

补充计算 $\frac{\partial}{\partial\mu}\cdots=0$: $0\ 0-\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots}{2\delta}$ $\quad x_1^2-2x_1\mu+\mu^2$

$=-\frac{n\cdot2\mu-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{2\delta}=0$

~~$-2x_1+2\mu$~~ $\frac{-2x_1+2\mu-2x_2+2\mu+\cdots}{2\delta}$

$$\mu=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}=\bar{x}\ \square$$

$\frac{\partial}{\partial\delta}\cdots=0$ $\quad 0-\frac{n}{2}\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2}\delta^{-2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2=0.$

$$\frac{-n\cdot\delta+\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{2\delta^2}=0\Rightarrow\delta=\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}=S_n^2.\ \square$$

牛逼啊22级的. 最后结果！$\left\{\begin{array}{l}\hat{\mu}_{MLE}=\bar{x}\\ \hat{\delta}_{MLE}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\end{array}\right.$
假如 需把 μ 代进去 ($\mu=\bar{x}$) 才得具体值. (即最大值点)

Mar 8, 2024

$L(x_1, x_2, \dots x_n; \vec{\theta}) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k; \vec{\theta})$ $\begin{cases} \text{离散型总体：概率分布　分布列　概率函数} \\ \text{连续型总体：概率密度函数} \end{cases}$

联合函数　似然函数.

看成x的函数　…θ的函数.

$\vec{\theta} \in \Theta$　若∃$\hat{\vec{\theta}} = \vec{\rho}(x_1, x_2, \cdots x_n)$ s.t. $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\vec{\theta}}) = \sup_{\vec{\theta} \in \Theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\vec{\theta}})$

则称$\hat{\vec{\theta}}$为$\vec{\theta}$的MLE

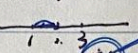
书上伯努利分布推一下(反面)

[例4] $X \sim U(a,b)$ 均匀分布　求 $\hat{a}_{MLE}$ $\hat{b}_{MLE}$

治学严谨(新老师)

解. $f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$

f(1,3)



占总的比例

$\frac{1}{2} \times$ 宽度

$0 \quad x_{min} \quad x_{max} \quad b$

$x_{(1)} \quad x_{(n)}$

$b = \max X = X_{(n)}$

$a = \min X = X_{(1)}$

$\Rightarrow L(a,b) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k; a, b) = \begin{cases} \left(\frac{1}{b-a}\right)^n & a < x_k < b \quad \forall k \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$　全体x 含x_{min} x_{max}

$a < \min x_k$ x $\max x_k < b$.

($(x_1, x_2, \dots, x_n)$取值肯定在a~b 故下面不存在　但分段函数要写"其他"~0).

直接研究.

$\frac{1}{2-1}$　$\frac{1}{3-1}$: $b\uparrow$值$\downarrow$　$\left(\frac{1}{b-a}\right)^n$　关于$b\downarrow$　关于$a\uparrow$

$\frac{1}{3-1}$　$\frac{1}{3-2}$: $a\uparrow$值$\uparrow$　大 小

2. $\hat{b}_{MLE} = X_{(n)} = \max_{1 \le i \le n} x_i$　　$\hat{a}_{MLE} = X_{(1)} = \min_{1 \le i \le n} x_i$

故 b取最小 a取最大 使$L(a,b)$最大.

$b = X_{(n)}$

$a = X_{(1)}$

同时保证 $a < x < b$ 范围.

又 $x < b$

故 $b_{min} = \max x_i = X_{(n)}$

则 $a = \min x_i = X_{(1)}$

故值$L(a,b)$ max

有 $b_{min} = X_{max} = X_{(n)}$

$a_{max} = X_{min} = X_{(1)}$

由x_i取值from $x_1 x_2 \cdots x_n$得出

✓ 新例题 [例5] 设$x_1, \dots, x_n$是来自两参数指数分布的样本.　x:指全体x

$f(x; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{1}{\theta_2}(x - \theta_1)} & x \geq \theta_1 \\ 0 & x < \theta_1 \end{cases}$　其中: $\theta_1 \in R$ $\theta_2 \in (0, +\infty)$ 求 $\hat{\theta}_{1\,MLE}$ $\hat{\theta}_{2\,MLE}$

$\theta_1 < x$

$x_k \geq \theta_1 \quad \forall k$

解: $L(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2^n} e^{-\frac{1}{\theta_2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - \theta_1)} \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$

x 小 x

$e^{-1} > e^{-2}$

$\frac{1}{e}$ $\frac{1}{e^2}$

$L(\theta_1, \theta_2)\uparrow$

θ_1越大 L越大

当 $x_k \geq 0 \quad \forall 1, 2, \dots, n$时.

$(x_1 - \theta_1) + (x_2 - \theta_1) \dots$

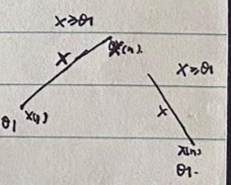
$-n\theta_1$

$\ln L(\theta_1, \theta_2) = -n \ln \theta_2 - \frac{1}{\theta_2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - \theta_1)$

θ_2^{-n}

$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = \frac{n}{\theta_2} > 0 \\ \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = -\frac{n}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{n\theta_1}{\theta_2^2} \end{cases}$

$\theta_1\uparrow$ 增或减来判断$\hat{\theta}_{1\,MLE}$取值 $\rightarrow$ 故 $\hat{\theta}_{1\,MLE} = X_{(1)}$



$x \geq \theta_1$　$\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\nearrow$

$\boxed{\begin{matrix} \theta_1 \quad x_{min} \quad x_{max} \\ \hat{\theta}_{1\,MLE} = X_{(1)} \end{matrix}}$

令 $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{2\,MLE} = \bar{X} - X_{(1)}$

$\frac{-\theta_2 n + \sum_{k=1}^{n} x_k - n\theta_1}{\theta_2^2} = 0.$

$\theta_2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} - \theta_1 = \bar{X} - X_{(1)}$

[例6] 设总体 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2\theta & \theta & 1-3\theta \end{pmatrix}$ $0 \le \theta \le \frac{1}{3}$ 求 $\hat{\theta}_{MLE}$

$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

$f(x;p) = p^x (1-p)^{1-x}$

解法一. $L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)$ $f(x;\theta) = (2\theta)^{r_1(x)} \theta^{r_2(x)} (1-3\theta)^{r_3(x)}$

未知, 需构造

$r_1(x) = \begin{cases} 1 & x=-1 \\ 0 & x=0,2 \end{cases}$ 过点 $(-1,1)$ $(0,0)$ $(2,0)$ 找二次函数.

n位 (n-1)次多项式 可拿过去

$r_2(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & \end{cases}$ 则 $r_1(x)$ $r_2(x)$ $r_3(x)$ 都可以求出来, 则 $f(x;\theta)$ 可求. …→ 最后 $\hat{\theta}_{MLE} =$

$r_3(x) = \begin{cases} 1 & x=2 \\ 0 & \end{cases}$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{18n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$

解法二. 把 $f(x;\theta)$ 代入 $L(\theta)$

$L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta) = (2\theta)^{\sum_{k=1}^{n} r_1(x_k)} \cdot \theta^{\sum_{k=1}^{n} r_2(x_k)} \cdot (1-3\theta)^{\sum_{k=1}^{n} r_3(x_k)}$

$x=-1$ 2θ

$r_1(x_k)$: $1,0,0.$

$\Rightarrow 2\theta.$

求和 则 $-1 \sim 1$, $-1 \sim 1$, ⋮, -1 } n_1个

设样本观测值 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中有 n_1 个 -1 n_2 个 0 n_3 个 2

则 $n_1 + n_2 + n_3 = n$

$L(\theta) = (2\theta)^{n_1} \cdot \theta^{n_2} (1-3\theta)^{n_3}$

$\Rightarrow \ln L(\theta) = n_1 \ln 2\theta + n_2 \ln\theta + n_3 \ln(1-3\theta)$ $\ln(2\cdot\theta) = \ln 2 + \ln\theta$

令 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = \frac{n_1}{\theta} + \frac{n_2}{\theta} + \frac{-3 \cdot n_3}{1-3\theta} = 0$ $\Rightarrow$ $\hat{\theta}_{MLE} = \frac{n_1+n_2}{3n}$

注: $n_1 \cdot \frac{1}{2\theta} \cdot 2 = \frac{n_1}{\theta}$ $(2\theta)' = 2$

$\frac{n_1+n_2}{\theta} + \frac{-3n_3}{1-3\theta} = 0$

$-3n_3\theta + (n_1+n_2)(1-3\theta) = 0$

$-3n_3\theta + (n_1+n_2) - 3(n_1+n_2)\theta = 0$

$\theta(-3n_3 - 3(n_1+n_2)) + (n_1+n_2) = 0$

$\theta = \frac{n_1+n_2}{3(n_1+n_2)+3n_3}$

$= \frac{n_1+n_2}{3(n-n_3)+3n_3}$

$= \frac{n_1+n_2}{3n}$

[接法一] $\sum_{k=1}^{n} X_k = -n_1 + 2n_3$

$\sum_{k=1}^{n} X_k^2 = (-1)^2 n_1 + 2^2 n_3 = n_1 + 4n_3.$

故 $\hat{\theta}_{MLE} = \frac{1}{3} - \frac{1}{18n}(6n_3) = \frac{1}{3} - \frac{n_3}{3n} = \frac{n-n_3}{3n}$ $\frac{n-n_3}{3n}$

$= \frac{n_1+n_2}{3n}.$

作业: 1. 习题二 1, 2, 4

2. 设 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & \theta^2 & 1-2\theta \end{pmatrix}$ 其中 $0 < \theta < \frac{1}{2}$ 利用样本观测值 $(3,1,3,0,3,1,2,3)$

找知: n_1 n_2 n_3 n_4 的具体数目.

求 $\hat{\theta}_{MLE}$

$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$?

计算题 二. 矩估计

想法: 用样本矩代替总体矩

原点矩

中心矩

定义: 设总体 X 的 m 阶原点矩存在 $V_m = EX^m$ 存在. → 即所有低阶矩存在

$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \Theta$ 为未知参数, 且可以用总体矩表示.

$\begin{cases} \theta_1 = f_1(V_1, V_2, \dots, V_m) \\ \vdots \\ \theta_m = f_m(V_1, V_2, \dots, V_m) \end{cases}$

$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 样本

$\downarrow$

$V_k = EX^k$ 总体 ~~能认懂了~~

回到 x_i 的表示

设样本为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

原点矩 距离

中心: 均值

1: 样本k阶原点矩为 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 则 $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ 的矩估计为:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{1,M} = f_1(A_1, A_2, \cdots, A_m) \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{m,M} = f_m(A_1, A_2, \cdots, A_m) \end{cases}$$

$f(A_1 \cdots A_m)$: $A_1 \sim A_m$ 的组合.

要写出 A_1: 一阶 $A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} X_i$

A_2: 二阶 $A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} X_i^2$ $(x_i - 0)^2 \xrightarrow{\text{可写出}}$ 方差 DX 而不是 DX.

根据 $DX = EX^2 - (EX)^2$

注: ① 由科尔莫戈罗夫大数定律知 $P(\lim_{n\to+\infty} A_k = V_k) = 1$

从而若 f_k 连续 则 $P(\lim_{n\to+\infty} \hat{\theta}_{k,M} = \theta_k) = 1$ 以概率意义收敛 样本矩几乎处处收敛到总体矩

科尔莫戈罗夫 设 $x_1, x_2 \cdots$ 独立同分布 则 $P(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = a) = 1 \Leftrightarrow EX_i = a \quad \forall i = 1, 2, \cdots$

② 除了原点矩, 也可以用中心矩 一阶中心矩: 0 二阶中心矩 $E(X-EX)^2$ 方差DX

③ 矩估计量可能不唯一, 可能不存在

④ 在求矩估计时, 并不需要知道总体的分布类型 (只需要知道 m 个参数的表达式)

$g(\theta) = V$

$\theta = f(V)$

反求θ参数 样本给出

[例1] 正态分布总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 求 $\hat{\mu}_M$, $\hat{\sigma}^2_M$ 矩估计

MLE: 极大似然.

$\hat{\mu} =$ ~~...~~ $\frac{\sum x_i}{n}$ $V_1 = EX = \mu$ $DX = EX^2 - (EX)^2 = \sigma^2$ $\Rightarrow \begin{cases} \mu = EX \\ \sigma^2 = DX \text{ or } EX^2 - (EX)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \hat{\mu}_M = \bar{x}$

解: $\begin{cases} V_1 = EX = \mu & \text{总体} \\ \boxed{DX = EX^2 - (EX)^2} = \sigma^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = EX \\ \sigma^2 = DX \text{ 或 } EX^2 - (EX)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu}_M = \bar{x} & \hat{\sigma}^2_M = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} \text{ or } \frac{1}{n}\sum x_i^2 - (\frac{1}{n}\sum x_i)^2 \\ \hat{\sigma}^2_M = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n} \end{cases}$

二阶中心矩: 方差 $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 总体矩

或 $\hat{\sigma}^2_M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)^2$

$DX = \sum_{i=1}^{n}(x_i - EX)^2 p_i$

$= \sum_{1}^{n} x_i^2 p_i - 2EX\sum_{1}^{n} x_i p_i + (EX)^2 \sum p_i$

$= EX^2 - 2EXEX + (EX)^2$

$= EX^2 - (EX)^2$

如果是原点矩的话! 二阶: $\boxed{V_2 = EX^2} = (EX)^2 + DX = \mu^2 + \sigma^2$ 总体 $x_i - \bar{x}$

$\Rightarrow \begin{cases} \mu = V_1 \\ \sigma^2 = V_2 - \mu^2 = V_2 - V_1^2 \end{cases}$

矩估计: 样本替总体 $\begin{cases} \mu = V_1 = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x} \\ \sigma^2 = V_2 - V_1^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - (\frac{1}{n}\sum x_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \end{cases}$

[例2] 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 正态 对给定C 求 $P(X > C)$ 的矩估计

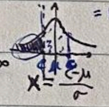
$\frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$1 - P(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{c-\mu}{\sigma})$

$= 1 - \Phi(\frac{c-\mu}{\sigma})$

解. $P(X > C) = 1 - P(X \le C)$

往标准正态分布上凑 —— 标准化 $\boxed{\begin{matrix} X \sim N(\mu, \sigma^2) \\ \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \end{matrix}}$



先看概率 再回来理解这个统计

$f(x; \mu, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta}}$

$= 1 - P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{C-\mu}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{C-\mu}{\sigma})$ 其中 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x\text{值}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 变量

$= 1 - \Phi(\frac{C - EX}{\sqrt{DX}})$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

从而 $P(X > C)$ 的矩估计为 $1 - \Phi(\frac{C - \bar{X}}{\sqrt{S_n^2}})$ 总体方差 $1 - \Phi(\frac{C - \bar{X}}{\sqrt{S_n^2}})$ 也写 $S_n \sqrt{\cdots}$

$DX: S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 未修正 $\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

[例3] $X \sim$ 柯西分布 $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $x \in R$ 密度函数

$EX = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{1+x^2} dx = +\infty$ 即 EX 不存在. 是否可积: 看无穷远处的极限.

绝对值, 发散

若为x, 则 EX=0 $x\frac{1}{1+x^2}$ 奇函数

所有矩都不存在 故不存在矩估计.

EX是其期望值 三值×密度 概率 $\sum$ / $\int$

(矩: 原点矩: 相对原点的矩 距离 | 中心矩: ~ 均值 ~)

$EX = \int_R |x| f(x) dx = +\infty$. EX 不存在.

Mar 12, 2024

原来一阶矩
二阶
还是于积分

看矩怎么由参数表示出

补:指数分布
$X\sim E(\lambda)$
$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$\boxed{EX=\frac{1}{\lambda}}\Rightarrow \lambda=\frac{1}{EX}$

$\boxed{DX=\frac{1}{\lambda^2}}\Rightarrow \lambda=\frac{1}{\sqrt{DX}}$

$\lambda=\frac{1}{\bar{x}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum x_i}$

$\lambda=\frac{1}{\sqrt{DX}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2}}$

矩估计不唯一.

[例5] 设 $X\sim f(x,\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}$, $x\in\mathbb{R}$ 其中 $\theta>0$ 未知. 求 $\hat{\theta}_M$

即: 与 θ 无关

解: 奇函数. $EX=\int_{\mathbb{R}}x\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=0$ $\boxed{\text{是0而但不存在.故一阶矩不行,尝试二阶矩}}$

$EX=\int x\cdot f$

$EX^2=\int_{\mathbb{R}}x^2\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx$ 分部积分 $\int udv=uv-\int vdu$

偶函数.

$\int(uv)'=\int u'v+\int uv'$

$uv=\int udv+\int vdu$

$=\boxed{2\theta^2}$

$\Rightarrow\theta=\sqrt{\frac{EX^2}{2}}\quad\Rightarrow\hat{\theta}_M=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

[例6] 设 $X\sim B(m,p)$ m已知 $p\in(0,1)$未知 令 $q=1-p$ $(X_1,\cdots,X_n)$为样本 求 $\frac{p}{q}$的矩估计

解: $\boxed{EX=mp}\Rightarrow p=\frac{EX}{m}$ $\quad\frac{p}{q}=\frac{p}{1-p}$ 从而 $\frac{p}{q}$的矩估计为 $\frac{\frac{\bar{x}}{m}}{1-\frac{\bar{x}}{m}}=\frac{\frac{\bar{x}}{m}}{\frac{m-\bar{x}}{m}}=\frac{\bar{x}}{m-\bar{x}}$

用一阶原点矩

$\hat{p}_M=\frac{\bar{X}}{m}$ $\quad\hat{p}_M=\frac{\bar{x}}{m}$ $\quad\frac{\frac{\bar{x}}{m}}{1-\frac{\bar{x}}{m}}$

又由于 $\boxed{DX=mpq}$ $\Rightarrow\frac{p}{q}=\frac{p}{\frac{DX}{mp}}=\frac{mp^2}{DX}=\frac{(EX)^2}{mDX}$ 从而 $\frac{p}{q}$的矩估计为 $\frac{(\bar{x})^2}{mS_n^2}$ (其中, $\cdots$

用一阶中心矩 另一个 $\bar{x}=\cdots$, $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

mpq $\quad\frac{p}{\frac{DX}{mp}}=\frac{mp^2}{DX}=\frac{(EX)^2}{mDX}\Rightarrow\frac{(\bar{x})^2}{mS_n^2}$ 不唯一.

其中: $\bar{x}=$ $\quad S_n^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$

[例7] 设 $X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\theta & 0<x<1\\ 1-\theta & 1\le x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 其中 $\theta\in(0,1)$ 设$(x_1,\cdots,x_n)$为样本, N为样本值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中小于1的个数. 求 $\hat{\theta}_{MLE}$ 和 $\hat{\theta}_M$

(干扰信息) 概率是0,故无其他

解. $\boxed{EX=\int_{\mathbb{R}}xf(x)dx}=\frac{3}{2}-\theta$. $\Rightarrow\hat{\theta}_M=\frac{3}{2}-\bar{X}$

(略过程)

$\hat{\theta}_M=\frac{3}{2}-\bar{X}$

$L(\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$
$\ln L=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$
$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0$ $\quad N-N\theta-n\theta+N\theta=0$

$\boxed{L(\theta)=\prod_{k=1}^{n}f(x;\theta)}=\theta^N(1-\theta)^{n-N}\quad\theta\in(0,1)\quad\Rightarrow\hat{\theta}_{MLE}=\frac{N}{n}$ $\quad\hat{\theta}_{MLE}=\frac{N}{n}$

$L=\prod_{k=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$ $\quad\hat{\theta}_{MLE}$

$EX=\hat{\theta}_M=\int_0^1xf(x;\theta)+\int_1^2xf(x;\theta)$
$=\int_0^1x\theta\cdot dx+\int_1^2x\cdot(1-\theta)dx$
$=\theta\cdot\frac{1}{2}x^2|_0^1+(1-\theta)\frac{1}{2}x^2|_1^2$
$=\theta\cdot\frac{1}{2}+(1-\theta)\cdot\frac{3}{2}$
$=\frac{1}{2}\theta-\frac{3}{2}\theta+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\theta$

$\hat{\theta}_M=\frac{3}{2}-EX=\frac{3}{2}-\bar{X}$

§2. 估计的评价标准.

优良性标准
$X\quad f(x;\theta)\quad\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\in\Theta\subset\mathbb{R}^m$
$g(\theta)$是θ的函数 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$样本
$\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是$g(\theta)$的估计量
直观上看 $|\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)-g(\theta)|$越小越好.
但$\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$依赖于样本,是随机变量
且$g(\theta)$未知

估计 $\varphi(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 统计量.

$\hat{\theta}_M=\frac{2}{3}-\bar{x}$ $\quad g(\theta)\quad\varphi(X_1,\cdots X_n)\quad|\varphi-g(\theta)|$ 比较小 (希望)

期望 $E_\theta\varphi$ $\quad$ 其分布与θ有关 与总体同分布.

方差 $D_\theta\varphi$ 或 $Var_\theta\varphi$

$E_\theta\varphi^{(x_1,\cdots,x_n)}=g(\theta)$

概念
证明
估计.
唯一,存在.吗?
期望/方差/无偏

无偏性

含义:没有系统偏差

定义: 若对 $\forall\theta\in\Theta$, 有: $E_\theta\varphi(X_1,X_2,\cdots X_n)=g(\theta)$, 则称 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是$g(\theta)$的无偏估计

与θ有关的 样本期望.

注: ① 若 $\hat{\theta}$是θ的无偏估计, 则其函数 $g(\hat{\theta})$不是 $g(\theta)$的无偏估计. 除非 $g(\theta)$是θ的线性函数

② 无偏估计可能不存在，可能不唯一，可能不合理

③ 无偏估计只有在大量重复使用时才能显示出它的使用价值，若试验次数只有一次或只进行一次估计则不必追求无偏性。

Apr 14, 2024

理解理解⇒ 定理 2.1 设总体X的期望 $E_\theta X$ 及方差 $D_\theta X$ 存在，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

则 ① $E_\theta \bar{X} = E_\theta X$ ② $D_\theta \bar{X} = \frac{1}{n} D_\theta X$ ③ $E_\theta S^2 = D_\theta X$ 对所有分布都成立。

样本均值是总体均值的无偏估计量。样本均值的方差。修正的样本方差是总体方差的无偏估计量。

$E[S^2] = \sigma^2$ ⟺ 修正样本方差的期望 = 总体方差。

$\hat{\mu}_1 = X_1$

$\hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_n}{n}$

$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$

$D\hat{\mu}_1 = DX$

$D\hat{\mu}_2 = \frac{DX}{2}$

$D\bar{X} = \frac{DX}{n}$

证明 ① $E_\theta \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n} \cdot n E_\theta X = E_\theta X$

每个 X_i 和总体同分布

② 样本均值的方差 $D_\theta \bar{X} = D_\theta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} D_\theta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D_\theta X = \frac{1}{n} D_\theta X$

样本均值一次～次的期望：多次抽取，每次抽取的平均值，长期

③ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n-1}\bar{X}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{n\bar{X}} + \frac{n}{n-1}\bar{X}^2$

$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}^2$

样本均值的方差：实际上在谈论样本均值作为一个随机变量自身的分散程度，是基于样本中的数据来计算的。随着样本大小的增大，样本均值的方差↓，意味样本均值更稳定，更接近总体均值。

$\Rightarrow E_\theta S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 - \frac{n}{n-1} E\bar{X}^2$ （$DX = EX^2 - (EX)^2 \Rightarrow EX^2 = DX + (EX)^2$.）

$EX_i^2 = (EX)^2 + DX_i = (EX)^2 + \boxed{DX}$

$E\bar{X}^2 = (E\bar{X})^2 + \boxed{D\bar{X}} = (EX)^2 + \boxed{\frac{1}{n}DX}$ 总体的方差

故 $E_\theta S^2 = D_\theta X$

例1 设 $E\hat{\theta} = \theta$ 且 $D\hat{\theta} > 0$ 则 $\boxed{E\hat{\theta}^2 = (E\hat{\theta})^2 + D\hat{\theta}} > (E\hat{\theta})^2 = \theta^2$

方差 > 0

故 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。

Apr 15, 2024

difficult. 例2. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为取自两点分布 $B(1, p)$ 的一个样本

(1) 求 $p(1-p)$ 的一个无偏估计（不唯一）

$DX = E(S^2)$ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$ 是一个无偏估计（修正的）

(2) 证明 $\frac{1}{p}$ 不存在无偏估计

反证

$DX = EX^2 - (EX)^2$

$EX^2 = DX + (EX)^2$

解：(1) $EX = p$ 猜测 $\bar{X}(1 - \bar{X})$：$E(\bar{X}(1-\bar{X})) = E(\bar{X} - \bar{X}^2) = E\bar{X} - E\bar{X}^2$

定理① $= p - ((E\bar{X})^2 + D\bar{X})$ $\frac{1}{n}DX$

$E\bar{X} = EX = p$ 定理①

定理② $= p - p^2 - \frac{1}{n}p(1-p) = \frac{n-1}{n}p(1-p)$

p q

$DX = p(1-p)$

$E(S^2)$

从而 $E\left(\frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})\right) = p(1-p)$ 从而 $\frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})$ 是 $p(1-p)$ 的无偏估计。

★ 又才 $p(1-p) \Rightarrow pq$ $DX = p(1-p) = E(S^2)$ 从而 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 是 $p(1-p)$ 的无偏估计

较easy.

(2). 证明.（反证法）若 $\varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $\frac{1}{p}$ 的无偏估计.

$\begin{array}{c|c} X & P(X = x_k) \end{array}$

$Y = f(X)$ $P(Y = y_k)$

$EY = \sum y_k P(Y = y_k)$

$\boxed{EY = \sum_k f(x_k) P(X = x_k)}$

则 $E_\theta \varphi = \frac{1}{p}$ $\forall p \in (0, 1)$

即 $\sum_{(x_1, \cdots, x_n)} \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$（n个随机变量同时发生的概率）

同时 $X=x$ $Y=y$ 的概率

样本联合概率分布 $\prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k) = \prod_{k=1}^{n} P(X = x_k) = \prod_{k=1}^{n} p^{x_k}(1-p)^{1-x_k}$

$= \sum_{(x_1, \cdots, x_n)} \varphi(x_1, \cdots, x_n)\, p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$

(2) 假设 $g = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\frac{1}{p}$ 的无偏 $E_p\varphi = \frac{1}{p} \Rightarrow p \cdot E_p \varphi = 1$

则对 $\forall p \in (0,1)$

有 $Eg(x_1,\cdots,x_n) = \sum g(x_1,\cdots,x_n) P(X_1=x_1,\cdots)$ 改为 $\sum_{(x_1,\cdots,x_n)} \varphi(x_1,\cdots,x_n) p^{1+\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} - 1 = 0 \quad \forall p \in (0,1)$

$\prod p(x_i = x_i) = \prod p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$

max：次数 $n+1$

$0 \sim 1$ 内所有 $<p$ 都是根. 但 $n+1$ 次最多 $n+1$ 个根.

$= \sum g(x_1,\cdots,x_n) p^{\sum x_i} (1-p)^{n-\sum x_i}$ 由于满足上式的 φ 不存在，从而 $\frac{1}{p}$ 不存在无偏估计

假设 $= \frac{1}{p}$

$\Rightarrow \sum g(x_1,\cdots,x_n) p^{1+\sum x_i} (1-p)^{n-\sum x_i} - 1 = 0$

$n+1$ 个根

$\forall p \in (0,1)$ x.

1个样本，具随机性.

[例3] 设 $X \sim P(\lambda)$ $\lambda > 0$ 为未知参数 设 X_1 为来自 X 的样本 令 $\varphi(X_1) = (-1)^{X_1}$

泊松分布

则 $E\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!}}_{e^{-\lambda}\text{的泰勒展开}}$ 级数 $= e^{-2\lambda}$.

$Eg(X)$

服从总体的分布泊松

对所有 λ 都成立. $\forall \lambda > 0$.

从而 $\varphi(X_1) = (-1)^{X_1}$ 是 $e^{-2\lambda}$ 的无偏估计　若 X_1 取奇数时 $\varphi(X_1) = -1$ 无偏估计不合理 从而不能片面追求无偏性

$\varphi(X)$　X_1奇. $\varphi(X_1) = -1$　$g(\lambda) > 0$　<0.

泊松分布

$np_n \to \lambda$ ($n \to \infty$)　$b(k; n, p_n) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $p(k;\lambda)$

$k: 1, 2, 3$. n. 次数. p_n. 概率 $\lambda = np_n$. n 大 p_n 小.

Mar 15. 2024

作业二 [作业 习题二 10 14 15 18]

$I_{[c-\theta, c+\theta]}(x)$ 示性函数. $I_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n(x)$

题4. $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$

估计的评价指标: 无偏性

$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^n \left(e^{-\frac{x_i^2}{2}} + \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$

似然函数

a 是展开点

e^x $x=0$ 处 $e^0 = 1$

e^x $f^{(n)}(0) = 1$

$\frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x-0)^n$

$\frac{x^n}{n!}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

e^{-x} $-x$ x^2 $-x^3$

μ, σ^2 不存在最大似然估计. → 无界函数 不存在最大值

$\geq \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n-1} e^{-\frac{x_i^2}{2}}\right) \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

对 $\forall M > 0$ $\exists \mu = x_n$ $\sigma_0 > 0$

s.t. $A \frac{1}{\sigma} > M$ $\forall \sigma < \sigma_0$

$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$　$g(\theta)$

$E_\theta \varphi = g(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta$

评价估计量. 有效性.

$E\bar{x}$ ~~$D\bar{x}$ $E\bar{x}^2$~~

定义(均方误差)：设 $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $g(\theta)$ 的估计，则称 $M_\theta(\varphi) = E_\theta(\varphi - g(\theta))^2$ 为 φ 的均方误差.

注：若 $E_\theta \varphi = g(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta$ 则 $M_\theta(\varphi) = E(\varphi - E_\theta\varphi)^2 = D_\theta(\varphi)$ 理定理6 这里 φ 仍是样本，此处仅是正常推导 φ 的方差

φ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计　$\frac{\sum}{n}$　$Var_\theta(\varphi)$ 因为并非总体方差

定义(有效性) 设 $\varphi_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\varphi_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 均为 $g(\theta)$ 的估计，且对 $\forall \theta \in \Theta$ 有：$M_\theta(\varphi_1) \leq M_\theta(\varphi_2)$

则称 φ_1 不次于 φ_2。此时若 $\exists \theta_0 \in \Theta$ s.t. $M_{\theta_0}(\varphi_1) < M_{\theta_0}(\varphi_2)$，则称 φ_1 比 φ_2 有效

例1. 记 $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$　$E\bar{X}_n = EX$　$D\bar{X}_n = \frac{1}{n}DX$　$D(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}DX$　$D(\bar{X}_{n+1}) = \frac{1}{n+1}DX$

样本 总体　样本 总体

$M(\bar{X}_n) < M(\bar{X}_{n+1})$

Apr 25, 2024

Apr 29, 2024

例2 $g(\theta)=E_\theta(X)$

设 $EX=\mu$ $\quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1 \quad \lambda_i\geq 0 \quad \forall i=1,2,\cdots,n$

$\varphi_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad \varphi_2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i$ 均为μ的估计. 无偏估计

$E\varphi_1=\mu \qquad E\varphi_2=\mu$

$D(\varphi_1)=D(\frac{1}{n}\sum X_i)=\frac{1}{n^2}D(\sum X_i)=\frac{1}{n}DX$

$M(\varphi_1)=E(\varphi_1-\mu)^2=D(\varphi_1)=\frac{1}{n}DX$

不是 φ_i 之线

$M(\varphi_2)=D(\varphi_2)=D(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i}_{独立})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \underbrace{DX_i}_{同分布?\ =DX}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 DX=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 DX$

$=\sum_{i=1}^{n}D(\lambda_i X_i)$

比较 $M(\varphi_1)$ 与 $M(\varphi_2)$ 柯西不等式 $\frac{1}{n}(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}_{=1})^2\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$

取等: $M(\varphi_1)=M(\varphi_2)$ 当且仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n}$

从而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不全相等时 φ_1 比 φ_2 有效.

$F_X=P(X_i\leq x)$

例3. 设 $X\sim U(0,\theta)$ $\frac{1}{\theta}x$ $\theta>0$ 未知 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为样本 $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 仅推最小

$X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

(1) 证明 $\varphi_1=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ $\quad \varphi_2=(n+1)X_{(1)}$ 都是θ的无偏估计 $E\varphi=\theta$

(2) 比较 φ_1 与 φ_2 的有效性

解. (1) $X_{(n)}$ 期望 求 $X_{(n)}$ 分布 $\quad EX_{(n)}=\int_R x f_{X_{(n)}}(x)dx$ 之后回代 $\int_0^\theta \frac{n}{\theta^n}x^n dx = \frac{n\theta}{n+1}$

$\boxed{F_{X_{(n)}}(x)=F_X^{\,n}(x)}=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ (\frac{x}{\theta})^n & 0<x\leq\theta\\ 1 & x>\theta\end{cases}$

X分布函数. 　总体分布函数

$\Rightarrow f_{X_{(n)}}(x)=\frac{d}{dx}F_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{n-1} & 0<x\leq\theta\\ 0 & 其他\end{cases}$

$\Rightarrow E\varphi_1=\theta$

$\frac{1}{\theta}\cdot n(1-\frac{x}{\theta})^{n-1}$

分布函数 $\boxed{F_{X_{(1)}}(x)=1-(1-F_X(x))^n}=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 1-(1-\frac{x}{\theta})^n & 0<x\leq\theta\\ 1 & x>\theta.\end{cases}$

$\Rightarrow f_{X_{(1)}}(x)=\frac{d}{dx}F_{X_{(1)}}(x)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})^{n-1} & 0<x\leq\theta\\ 0 & 其他\end{cases}$

$EX_{(1)}=\int_0^\theta x\frac{n}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})^{n-1}dx \qquad \boxed{令 1-\frac{x}{\theta}=t}$

$=\int_1^0 \theta(1-t)\frac{n}{\theta}t^{n-1}dt=\frac{1}{n+1}\theta$

$E\varphi_2=\theta$

(2) $M(\varphi_1)=D\varphi_1=(\frac{n+1}{n})^2DX_{(n)}=(\frac{n+1}{n})^2(EX_{(n)}^2-(EX_{(n)})^2)=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$

$M(\varphi_2)=D\varphi_2=(n+1)^2DX_{(1)}=\frac{2(n+1)}{n+2}\theta^2$

$M(\varphi_1)<M(\varphi_2)$

(1) 首先确定 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 的分布 即概率

$F_{X_{(1)}}(x)=P(X_{(1)}\leq x)$

$=1-P(X_{(1)}>x)$ 充分性

$=1-P(X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x)$

$=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i>x)$

$=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(X_i\leq x))$ $\quad \frac{x}{\theta}$

$=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F(x))=1-(1-F_X(x))^n$

$=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 1-(\frac{\theta-x}{\theta})^n & 0<x<\theta\\ 1 & x\geq\theta\end{cases}$

$F_{X_{(n)}}(x)=P(X_{(n)}\leq x)=P(X_1\leq x,X_2\leq x,\cdots,X_n\leq x)$

$=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leq x)=\prod_{i=1}^{n}F_X(x)=F_X^n(x)$

$=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ (\frac{x}{\theta})^n & 0<x<\theta\\ 1 & x\geq\theta\end{cases}$

从而相应密度函数为 $f_{X_{(1)}}(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ \frac{n}{\theta}(\frac{\theta-x}{\theta})^{n-1} & 0<x<\theta\\ 0 & x\geq\theta\end{cases}$

$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ \frac{n}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{n-1} & 0<x<\theta\\ 0 & x\geq\theta\end{cases}$

$\frac{x}{\theta}: 0\sim\theta \quad 0\sim 1$ $\quad 1-0\sim 1$ $\quad 0\sim -1 \ +1 \quad 0\sim 1.$

$EX_{(1)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_{X_{(1)}}(x)dx=\int_0^\theta x\cdot\frac{n}{\theta}(\frac{\theta-x}{\theta})^{n-1}dx=\frac{\theta}{n+1}.$

例5: $E\varphi_2=\theta$

$EX_{(n)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_{X_{(n)}}(x)dx=\int_0^\theta x\frac{n}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{n-1}dx=\frac{n\theta}{n+1}.$

从而 $\cdots\cdots$

(2). $DX_{(1)}=EX_{(1)}^2-(EX_{(1)})^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_{X_{(1)}}(x)dx-(\frac{\theta}{n+1})^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{n}{\theta}(\frac{\theta-x}{\theta})^{n-1}dx-(\frac{\theta}{n+1})^2$

$=\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$ 从而 $D\varphi_2=(n+1)^2DX_{(1)}=\frac{2(n+1)}{n+2}\theta^2$

$DX_{(n)}=\cdots=\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$ 从而 $D\varphi_1=(\frac{n+1}{n})^2DX_{(n)}=\frac{\theta^2}{n(n+2)}<D\varphi_2.$ 有效.

信息 $\varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

加工

不考. 充分统计量

定义: 设总体 X 的概率函数(或概率密度函数)为 $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$ 是未知参数. $(x_1,\cdots,x_n)$ 为样本.

若样本 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的联合概率函数(或联合概率密度函数)可以分解成

$L(\theta)=\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta) = g(\varphi,\theta)\cdot h$, $\forall\theta\in\Theta$ 其中 $\varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $h=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 且 h非负,且不依赖于θ

则称 $\varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为参数 θ 的充分统计量. why.

等价定义: 假设X为总体, $f(x,\theta)$ 概率函数(或——) $(x_1,\cdots,x_n)$ 为样本 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$

若在给定 $\varphi=t$ 的条件下, 样本 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的条件概率分布 $\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)$ 与θ无关, 则称φ是θ的充分统计量 相当于θ外已确定.

$\frac{g(\varphi,\theta)}{\varphi(x)}\cdot\frac{h(x)}{\geq 0}$

因子分解定理. $\varphi=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 θ 的充分统计量.

$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n} f(x_k,\theta)=g(\varphi,\theta)\cdot h$ 其中 $h=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 不依赖于θ, h非负

注: ① 充分统计量包含了样本 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中关于参数θ的全部信息

② 充分统计量不唯一 例如: 样本 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 本身就是一个充分统计量. $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2)$, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$

③ 若参数θ的 MLE 存在, MLE 一定是充分统计量的函数. 维数相同, 假设有n

$L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_n)$ max. $\hat{\theta}_{MLE}$

$\frac{d\ln L}{d\theta}=0$ $\quad 0=\frac{d}{d\theta}\ln L(\hat{\theta}_{MLE};x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$g(\varphi,\theta)\cdot h$ max

$g(\varphi,\hat{\theta}_{MLE})$ max $\Rightarrow \frac{d}{d\theta}g(\varphi,\hat{\theta}_{MLE})=0$

充分统计量举例

例: $X\sim E(\lambda)$ 指数 $\quad f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases} = I_{(0,+\infty)}(x)\lambda e^{-\lambda x}$

$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} f(x_k,\lambda)=\underbrace{\prod_{k=1}^{n} I_{(0,+\infty)}(x_k)}_{h}\lambda^n e^{-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k} = g(\varphi,\lambda)\cdot h$

① $h=\prod_{k=1}^{n} I_{(0,+\infty)}(x_k)$ $\quad \varphi=e^{\sum_{k=1}^{n}x_k}$ $\quad g(\varphi,\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda\varphi}$

统计量 已知函数 不能有未知 → 充分统计量

② $h=\cdots$; $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$ 向量 → 充分统计量. $\quad \varphi_k=x_k$ φ就是样本本身 $\quad g(\varphi,\lambda)=\lambda^n\cdot e^{-\lambda\sum_{k=1}^{n}\varphi_k}$

③ $h=\cdots$. $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ $\quad \varphi_1=x_1$ $\quad \varphi_2=(x_2,\cdots,x_n)$ $\quad g(\varphi,\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda(\varphi_1+\varphi_2)}$

Mar 19, 2024

$\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta) = g(\varphi,\theta)h \qquad \varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n) \qquad h=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq 0.$

充分统计量. 维度递缩越好

正态 $\theta=\sigma^2$

例12. $X\sim N(\mu,\sigma^2) \quad f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\mu,\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 联合概率分布

打开平方

$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\frac{n\mu}{\sigma^2}\bar{x}\right)\cdot e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}$

用1维2代替降维 中心合体

$h=1 \quad \varphi=(\varphi_1,\varphi_2) \quad \varphi_1=\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \quad \varphi_2=\bar{x}$

$g=(\varphi,\mu,\sigma^2)$ 或 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2$ 或 $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x}+\bar{x})^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2+2\bar{x}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})+n\bar{x}^2=nS_n^2+n\bar{x}^2$

均匀

例13. $X\sim U(a,b)$ $\prod_{k=1}^{n}f(x_k;a,b)=\begin{cases}\left(\frac{1}{b-a}\right)^n & a<x_k<b \ \forall k\\ 0 & 其他.\end{cases} = \prod_{k=1}^{n}\left(I_{(a,b)}(x_k)\frac{1}{b-a}\right)$

如果a=0. φ只$=x_{(n)}$

$f(x;a,b)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\in(a,b)\\ 0 & \text{others}\end{cases}=I_{(a,b)}(x)\frac{1}{b-a}$

$=\left(\frac{1}{b-a}\right)^n\prod_{k=1}^{n}I_{(a,b)}(x_k).$ φ.

每个都在(a,b)中才有值. 否则为0.

$=\left(\frac{1}{b-a}\right)^n I_{(a,+\infty)}(x_{(1)})\,I_{(-\infty,b)}(x_{(n)})$

依赖参数 θ. 最小 $\min x_i$ 最大 $\max x_i$

$\varphi=(\underbrace{x_{(1)}}_{\varphi_1},\underbrace{x_{(n)}}_{\varphi_2})$ 是(a,b)的充分统计量

$g=(\varphi,a,b)=\left(\frac{1}{b-a}\right)^n$

$\times I_{(a,+\infty)}(\varphi_1)$

$\times I_{(-\infty,b)}(\varphi_2)$

~~都不含~~ ~~[illegible]~~ 剩 $h=1$

不依赖参数的h

$\boxed{\varphi\text{是}\theta\text{的充分统计量. 参数}}$

两点: $f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x}$ $\prod f(x;p)=p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$ φ: 本身 $\varphi_1:\sum x_i$ $\varphi_2:(x_1+x_2,x_3,x_4,\dots x_n)$ 都是.

例14. $X\sim f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{1}{\theta}|x|}$. Laplace分布

$\theta>0.$ $\prod_{k=1}^{n}f(x;\theta)=\left(\frac{1}{2\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n}|x_k|}$

$g(\ \theta,\ \varphi).\ h=1$

例15. $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$ Γ分布.

$f(x;\alpha,\lambda)=\begin{cases}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0 & , x\leq 0\end{cases}$

$\prod_{k=1}^{n}f(x;\alpha,\lambda)=\left(\prod_{k=1}^{n}I_{(0,+\infty)}(x_k)\right)\lambda^{n\alpha}\Gamma(\alpha)^{-n}\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\alpha-1}e^{-\lambda\sum x_k}$

$=g(\varphi,\alpha,\lambda)h$

找作为一个整体出现. $\varphi=\left(\prod_{k=1}^{n}x_k,\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$

或变形 $e^{-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k\ln x_k}$ 指数和转积 $e^{(\alpha-1)\sum_{k=1}^{n}\ln x_k-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k}$

如何是 $\varphi=\left(\sum_{k=1}^{n}\ln x_k,\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$

例 $p(x;\theta,\mu)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{(x-\mu)}{\theta}}$ $(x>\mu,\theta>0)$ $(\bar{x},x_{(1)})$是φ. Proof: $p(x_1,x_2,\dots,x_n;\theta,\mu)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum(x_i)}{\theta}}\ \ I_{(x_{(1)}>\mu)}.$ (φ_2, φ_1)

$g(\varphi,\theta)$ $h=1.$

由因子分解定理 φ... 是(μ,θ)的充分(参数)统计量

考大题. 笔记都画这个!

$U(\varphi)=0$ a.e. $U(\varphi)$几乎处处为0.

无用信息 完全性. 完全备统计量

函数

U作用到φ后, 依赖于θ的函数.

定义(完全统计量): 设 $\varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为统计量, 若对任意(Borel可测) $U(\cdot)$, 只要: $E_\theta U(\varphi)=0\ \forall\theta\in\Theta$ 就有: $P_\theta(U(\varphi(x_1,\cdots,x_n))=0)=1\ \forall\theta\in\Theta$ 则称 $\varphi=\varphi(x_1,\cdots x_n)$为完全统计量

$V = U - a$
平移变换.

(找哪帮写过去问答案 并与他讨论) 日本京九乐

May 21

等价定义: 若对任意 (Borel 可测) 函数 $U(\cdot)$ 只要 $E_\theta U(\varphi(x_1, \cdots, x_n)) = a \quad \forall \theta \in \Theta$

就有 $P_\theta(U(\varphi(x_1, \cdots, x_n)) = a) = 1 \quad \forall \theta \in \Theta$ 则称 φ 是完全统计量 (其中 a 是常数)

即 $U(\varphi(x_1, \cdots x_n)) \equiv a$

不包含无用信息 $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 加工

$E\,U(\varphi)$ 再加工 $= a$

φ 参数不能再被外摘了 = 完全

U 把 φ 中所包括的有关参数的信息摘掉了, 摘得少了.

作用到 φ 后

不包含θ或关于θ的信息很少

如 $f(\theta)$ 和参数有关 $EX = \mu$

只有 $U(\varphi) = a$ 除了这个函数外没有其它函数能达到 $E(U(\varphi)) = a$ 的结果了.

$\boxed{\text{但能 } U(\varphi) = a \text{ 作用粗暴地摘}}$.

例1. 设 $X \sim B(1, p)$ $(x_1 \cdots x_n)$ 为样本 证明 $\varphi = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 是完全统计量.

$\sim B(n, p)$

证明: $\varphi = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim B(n, p)$ $\sim B(n,p)$

二项分布 设 $U(\cdot)$.

(white board). 指到同前 ……

设 $U(\cdot)$ s.t $E\,U(\varphi) = 0 \quad \forall p \in (0,1)$ s.t $E\,U(\varphi) = 0$ $\forall p \in (0,1)$. $\forall E\,U(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} U(k) P(\varphi = k) = \sum_{k=0}^{n} U(k) C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

离散型 即 $E\,U(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} U(k)\, P(\varphi = k)$. 求期望. $= \sum_{k=0}^{n} U(k) \underbrace{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}_{P(\varphi = k)} = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} U(k)\, C_n^k \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k} = 0$

$U(k)$ 显值.

可推出 $= 0 \Rightarrow U(\varphi) \equiv 0$ 即 φ 为完全统计量

$= (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} U(k) C_n^k p^k (1-p)^{-k}$ $\forall p \in (0,1)$ $\left(\frac{p}{1-p}\right)^k = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} U(k)\, C_n^k \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = 0 \quad \forall p \in (0,1)$ $\Rightarrow U(k) = 0$. $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} U(k) C_n^k \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = 0$

$\Rightarrow U(k) = 0 \quad k = 0, 1, \cdots n$

从而 $U(\varphi) \equiv 0$ 即 $P_p(U(\varphi) = 0) = 1$

令 $t = \frac{p}{1-p}$ 上式 $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} U(k)\, C_n^k t^k = 0$

对 $t \in (0, +\infty)$

n 次多项式 n 个根 $t \in (0, +\infty)$ 均成立. 故矛盾. 故 $U(k) = 0$ $\forall k = 0, 1, \cdots, n$

(而不能说 $U(\cdot) = 0$) 论的是这个 即 φ 是完全的.

$t = \frac{p}{1-p}$

$\varphi \sim X_k$. $\Rightarrow U(\varphi) = 0$.

$F_{(1)} = 1 - (1 - F(x))^n \quad F(x) = \frac{x}{b-a}$

$x - a$ 提 $F(x)$ 的分子

例2. 设 $X \sim U(a, b)$ $a < b$ 为未知参数 ~~$f_{X_{(1)}}(x) = I_{(a,b)}(x)$~~

$f_{(1)} = \cancel{\ \ } \cdot F'(x) \cdot n (1 - F(x))^{n-1}$ $\left(\frac{b-a-x}{b-a}\right)^{n-1}$

$= F'(x) \cdot n (1 - F(x))^{n-1} = \frac{n}{b-a}\left(\frac{b-a-x}{b-a}\right)^{n-1}$ $= \frac{n \cdot (b-a-x)^{n-1}}{(b-a)^n}$

① $\exists U(\cdot)$ $V(\cdot)$ ②

$E\,U(X_{(1)}) = 0$ $E\,V(X_{(n)}) = 0$

则 $\int_a^b U(x) f_{X_{(1)}}(x)\, dx$

① $= \int_a^b U(x) \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} dx = 0$

② $\int_a^b V(x) \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n} dx = 0$

$\Rightarrow$ ① $\int_a^b U(x)(b-x)^{n-1} dx = 0$

② $\int_a^b V(x)(x-a)^{n-1} dx = 0$

分别对 a, b 求导: ① $0 - U(a)(b-a)^{n-1} = 0$ $\forall a<b$ $a, b \in R$

②: $V(b)(b-a)^{n-1} - 0 = 0$

$\Rightarrow$ ~~$U(a) = 0$~~ ~~$V(b) = 0$~~

也即: $U \equiv 0$ $V \equiv 0$.

故 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 完全.

证明: $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 是完全统计量

证: $f_{X_{(1)}}(x) = I_{(a,b)}(x) \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}$ $\qquad f_{X_{(n)}}(x) = I_{(a,b)}(x) \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}$

密度函数

$I_{(a,b)}(x) \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}$ $\Rightarrow U(x)$

$f_{(n)}(x) = I_{(a,b)}(x) f(x) n F(x)^{n-1} = \frac{1}{b-a} \cdot n \cdot \frac{x^{n-1}}{(b-a)^{n-1}} = \frac{n \cdot x^{n-1}}{(b-a)^n}$

令 $X \triangleq x - a$ $\quad b \to a - x + a$

假设 $\exists U(\cdot)$ s.t $E\,U(X_{(1)}) = 0$ $\forall a<b$ $a, b \in R$

$f_{X_{(n)}}(x) = I_{(a,b)}(x) = \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}$

即 $E\,U(X_{(1)}) = \int_a^b U(x) \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} dx = 0 \quad \forall a<b.\ a, b \in R$

连续型 consistant. $\Rightarrow \int_a^b U(x) (b-x)^{n-1} dx = 0. \quad \forall a<b \quad a, b \in R$

$E\,U = \int_a^b U(x) \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} dx = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{da}\int_a^b U(x)(b-x)^{n-1} dx = -U(a)(b-a)^{n-1} = 0 \quad \forall a<b \quad a, b \in R$

常数 均成立

$\Rightarrow U(a) = 0 \quad \forall a \in R$

若 $\exists V(\cdot)$ s.t $E\,V(X_{(n)}) = \int_a^b V(x) \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n} dx = 0 \quad \forall a<b, a, b \in R$

$\Rightarrow \int_a^b V(x)(x-a)^{n-1} dx = 0$ 对 b 求导: $\frac{d}{db}\int_a^b V(x)(x-a)^{n-1} dx = 0 \Rightarrow V(b) = 0 \quad \forall b \in R$

对 a 求导 $(a-a)^{n-1} = 0$ 常数.

考 ✓ 指数型分布（指数族）

定义：若随机变量 X 的密度函数（或概率函数）形如 $f(x;\theta)=S(\theta)h(x)\exp\{\sum_{k=1}^{m}C_k(\theta)T_k(x)\}$

其中 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\in\Theta$ $S(\theta)>0$ $h(x)\geq 0$ $f(x;\theta)=S(\theta)h(x)\exp\{\sum_{k=1}^{m}C_k(\theta)T_k(x)\}$

则称 X 为指数型分布

$S_{(\theta)}h_{(x)}e^{C(\theta)T(x)}$

定义（支撑） $\{x: f(x)>0\}$ 大于 0 的 x 的部分为其支撑 是对函数之支撑。

设随机变量 X 的密度函数（或概率函数）为 $f(x;\theta)$ 称集合 $\{x: f(x;\theta)>0\}$ 为 X 的支撑

是对随机变量之支撑

$h(x)>0$ 与参数 θ 无关

指数型分布的支撑与 θ 无关

Mar 22, 2024

$\varphi=\varphi(x_1,\dots x_n)$ $EU(\varphi)=0$ $\forall\theta\in\Theta$ $\Rightarrow U(\varphi)=0$ a.e. $\forall\theta\in\Theta$

完全统计量. 完全正交系 $\{\vec{\alpha}_k\}_{k=1}^{n}$ 若 $\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}_k$ $\forall k=1,2,\cdots,n\Rightarrow\vec{\beta}=0$

$\vec{\alpha}_i\perp\vec{\alpha}_j$ $\forall i,j$

$\varphi=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ $\varphi\in\{1,2,\cdots,m\}$ $f(k;\theta)=P\{\varphi=k\}$ $EU(\varphi)=\sum_{k=1}^{m}U(k)f(k;\theta)=0\Rightarrow U(\varphi)=0$

两向量内积

$(U(1),U(2),\cdots U(m))$ $\{(f(1,\theta),f(2,\theta),\cdots f(m,\theta))\}_\theta$

$X\sim f(x;\theta)$ $f(x,\theta)=S(\theta)h(x)e^{\sum_{k=1}^{m}C_k(\theta)T_k(x)}$ 其中 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\in\Theta$ $S(\theta)>0$ $h(x)\geq 0$

支撑 设 $X\sim f(x;\theta)$ $\{x: f(x;\theta)>0\}$ $f(x,\theta)>0$

支集

$S(\theta)$ 恒 >0 指数 e >0 故只 $h(x)\geq 0$

$\{x: f(x;\theta)>0\}=\{x: h(x)>0\}$

性质 ① 指数型分布的支撑与参数无关

$x\sim E(\lambda)$ $f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$ $x(\mu,\sigma^2)$ $f(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\{x: x>0\}$ R.

$X\sim B(n,p)$ $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $\forall k=0,\cdots n$

$\{0,1,\cdots,n\}$ 一个离散的点.

② 若 $X\sim f(x;\theta)=S(\theta)h(x)e^{\sum_{i=1}^{m}C_i(\theta)T_i(x)}$ 为指数型分布

则 $\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\theta)=S^n_{(\theta)}\prod_{k=1}^{n}h(x_k)e^{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}C_i(\theta)T_i(x_k)}$

$=S^n_{(\theta)}\prod_{k=1}^{n}h(x_k)e^{\sum_{i=1}^{m}C_i(\theta)\left(\sum_{k=1}^{n}T_i(x_k)\right)}$ $g(\varphi,\theta)h$.

支撑 充分统计量

故 $f(x_k;\theta)=g(\varphi,\theta)h$

以 $\varphi=\left(\sum_{k=1}^{n}T_1(x_k),\sum_{k=1}^{n}T_2(x_k),\cdots,\sum_{k=1}^{n}T_m(x_k)\right)$ 为 θ 的充分统计量

指数族的自然形式

在指数型分布的定义形式 $\boxed{f(x;\theta)=S(\theta)h(x)e^{\sum_{i=1}^{m}C_i(\theta)T_i(x)}}$ $\quad S_{(\theta)}h_{(x)}e^{\sum C_{(\theta)}T_{(x)}}$

令 $\boxed{\theta_i^*=C_i(\theta)}$ $\theta^*=(\theta_1^*,\theta_2^*,\cdots,\theta_m^*)$

以得到: $f^*(x;\theta^*)=S^*(\theta^*)h(x)e^{\sum_{i=1}^{m}\theta_i^* T_i(x)}$，叫~~指数型分布~~指数族的自然形式.

新参数 $\theta^*=(\theta_1^*,\theta_2^*,\cdots,\theta_m^*)$ 称为自然参数. 其取值范围为自然参数空间 Θ^*.

定理 $\boxed{\text{设指数型总体}X\text{的自然形式为 } f^*(x,\theta^*)=S^*(\theta^*)h(x)e^{\sum_{i=1}^{m}\theta_i^* T_i(x)}}$

其中 $\theta^*=(\theta_1^*,\cdots,\theta_m^*)\in\Theta^*$ 若自然参数空间 Θ^* 有内点

$\varphi=\left(\sum_{k=1}^{n}T_1(X_k),\sum_{k=1}^{n}T_2(X_k),\cdots\sum_{k=1}^{n}T_m(X_k)\right)$ 则: 充分统计量 是完全的.

$\sum T(X)$ 为 θ 的充分统计量.

$\theta_1^*,\ \theta_2^*$ $\quad \theta^*=(\theta_1^*,\theta_2^*)$ 有内点

则上述为完全C.

离散的完备性.

~~[illegible]~~ $\theta\in\Theta$ $\theta^*=(C_1(\theta),C_2(\theta),\cdots,C_m(\theta))\in\Theta^*$

若有内点.

[例1] $X\sim E(\lambda)$

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}=I_{(0,+\infty)}(x)\lambda e^{-\lambda x}$$

$S(\lambda)=\lambda$ $\quad h(x)=I_{(0,+\infty)}(x)$. $\quad C(\lambda)=-\lambda$ $\quad T(x)=x$ $\Rightarrow X$ 为指数型分布

$\Rightarrow \varphi=\sum_{k=1}^{n}T(X_k)=\sum_{k=1}^{n}X_k$ 为充分统计量

自然参数 $\lambda^*=C(\lambda)=-\lambda$ —空间 $\Theta^*=(-\infty,0)$ $\quad \Theta^*$ 有内点 $\Rightarrow \varphi=\sum_{k=1}^{n}X_k$ 是完全的

[例2] $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $\quad f(x,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2+\frac{\mu}{\sigma^2}x}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$

$f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 展

支撑 R 与参数无关 $\Rightarrow$ 可能是指数型分布

$S(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$ $\quad h(x)=1$. $\quad C_1(\mu,\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}$ $\quad T_1(x)=x^2$

$C_2(\mu,\sigma^2)=\frac{\mu}{\sigma^2}$ $\quad T_2(x)=x$

$\sum x_i$

$\Rightarrow X$ 为指数型分布

$\Rightarrow \varphi=\left(\sum_{k=1}^{n}T_1(X_k),\sum_{k=1}^{n}T_2(X_k)\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}X_k^2,\sum_{k=1}^{n}X_k\right)$ 为充分统计量.

自然参数 $\theta_1^*=C_1(\mu,\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}$ $\quad \theta_2^*=\frac{\mu}{\sigma^2}$ $\quad \theta^*=(\theta_1^*,\theta_2^*)=\left(-\frac{1}{2\sigma^2},\frac{\mu}{\sigma^2}\right)$

$\sigma^2>0$ $\quad <0$ $\quad -\infty,0$ $\quad -\infty\ +\infty$

故 $\Theta^*=(-\infty,0)\times(-\infty,+\infty)$ 有内点.

则 $\varphi=\left(\sum_{k=1}^{n}X_k^2,\sum_{k=1}^{n}X_k\right)$ 是完全的.

连续型分布.

[例3] $X \sim U(a,b)$ 均匀分布.

密度函数. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} \\ 0\end{cases} = I_{(a,b)}(x)\frac{1}{b-a}$ 不要急于化为指数型分布.

先找支撑: (a,b) 区间依赖参数 故 $U(a,b)$ 不是指数型.
支集

[例4] $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$. $\alpha, \lambda>0$

$f(x;\alpha,\lambda) = I_{(0,+\infty)}(x)\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\boxed{x^{\alpha-1}}e^{-\lambda x}$

支撑: $(0,+\infty)$ ✓ (再转化形式)

$= I_{(0,+\infty)}(x)\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\boxed{e^{(\alpha-1)\cdot\ln x-\lambda x}}$

$e^{(\alpha-1)\cdot\ln x}$

$e^{\ln x(\alpha-1)}$

$x^{\alpha-1}$

$e^{(\alpha-1)\ln x - \lambda x}$

C_1 $\alpha-1$ $T_1 \ln x$.
C_2 $-\lambda$ T_2 x.

h 仅未知 S 仅参

$C_1=\alpha-1$ $T_1=\ln x$

$C_2=-\lambda$ $T_2=x$

有内点

$(\alpha-1,-\lambda)$

$m \vee p$?

$\varphi=(\sum_{k=1}^n T_1(x_k), \sum_{k=1}^n T_2(x_k))$

$=(\sum_{k=1}^n \ln x_k, \sum_{k=1}^n x_k)$ 充分统计量.

Θ^*: $(\alpha-1,-\lambda)\in(-1,+\infty)\times(-\infty,0)$

有内点 故也完全.

例: 二项分布. $f(x;p)=C_m^x p^x (1-p)^{m-x} = C_m^x (1-p)^m (\frac{p}{1-p})^x$ $e^{\ln\frac{p}{1-p}\cdot x}$

[例5]. $X \sim P(\lambda)$

$\cancel{X}$: $T(x)$. $\varphi=\sum X_i$ 充分. 自然参数 $\ln\frac{p}{1-p}$: $(-\infty,+\infty)$ 故 φ 也完全.

$f(x,\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ $x=0,1,2,\cdots$ $f=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\frac{1}{x!}e^{x\ln\lambda}$

支撑 N 0 1. $\boxed{T\to\varphi}$ φ. $\checkmark$ $(-\infty,+\infty)$

$\varphi=\sum X_i$

$= \lambda^x (x!)^{-1}e^{-\lambda}$

$= \frac{1}{x!}e^{x\ln\lambda}e^{-\lambda}$

h. S.

$C(\lambda)=\ln\lambda$

$T(x)=x$

充分统计量(求和). $\sum_{k=1}^n T(x_k) = \sum_{k=1}^n X_k$.
指数.

$C(\lambda)=\ln\lambda\in(-\infty,+\infty)$ 有内点.

$\lambda\in\Theta=(0,+\infty)$

$\lambda^*=\ln\lambda\in\Theta^*=(-\infty,+\infty)$

故也完全.

例6) $X \sim G(p)$ 几何分布.

$f(x;p) = (1-p)^{x-1} p \quad x = 1, 2, \cdots$

支持. 1, 2, ⋯

$= p \cdot e^{(x-1)\ln(1-p)}$

$S(p)$, 换底, 指数保留.

T　　C(p)

$= \underbrace{p e^{-\ln(1-p)}}_{S(p)} e^{x \ln(1-p)}$

T　　C(p)

$\sum_{i=1}^{n} T(X_k) = \sum_{i=1}^{n} X_k$ 充分

$p \in (0,1)$

$\ln(1-p) \in (-\infty, 0)$ 自然参数空间有内点. 充.完

例7) $X \sim B(m,p)$ m已知 $p \in (0,1)$ 未知 $f(x;p) = C_m^x p^x (1-p)^{m-x}$

支撑 0, 1, ⋯, m

$= \underbrace{C_m^x}_{h} \underbrace{(1-p)^m}_{S} (1-p)^{-x} p^x \quad (\frac{p}{1-p})^x$

$= \underbrace{(1-p)^m}_{S} \underbrace{C_m^x}_{h} e^{x \ln\frac{p}{1-p}}$

T　C

统计量. 判断内点.

充分or完全.

(兼或)

充分统计量: 样本求和 $\sum_{i=1}^{n} X_k$.

考

Mar 26, 2024

充分完全统计量 找 (一致)最小方差无偏估计 (UMVUE)

定义: 设 $\varphi = \varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计, 且对一切无偏估计 $\psi = \psi(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 均有 $M_\theta(\varphi) \le M_\theta(\psi) \quad \forall \theta \in \Theta$

$E\varphi = g(\theta)$

则称 φ 是 $g(\theta)$ 的一致——

$M_\theta(\varphi) = E_\theta(\varphi - g(\theta))^2 = E_\theta(\varphi - E\varphi)^2 = D_\theta \varphi$

$E_\theta \varphi = g(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$

考 BLS定理: 若 $\varphi = \varphi(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 是充分完全统计量 $\psi = \psi(\varphi)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计, 则 $\psi(\varphi)$ 是 $g(\theta)$ 的 UMVUE.

persai

$\psi(\varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n))$ 　 $E(\psi(\varphi)) = g(\theta)$

例1. $X \sim B(m,p)$ m已知 $p \in (0,1)$ 未知 寻找 p 的最小方差无偏估计

已知: $\sum_{i=1}^{n} X_k$ 是充分完全统计量 　 由于 $E\varphi = E(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_k}_{\varphi}) = n EX = n \cdot mp \Rightarrow E(\frac{1}{mn}\varphi) = p$

φ //

从而 $\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n} X_k$ 为 p 的 UMVUE

$\frac{1}{m}\bar{x}$

根据充分完全… 构造无偏估计

$\boxed{\text{期望} = \text{参数值}}$ 构造期望与参数 → 2个参数. 直接 $E\varphi_i = \cdots$ 倒写出 $\psi(\varphi)$.

例1.2 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

总体期望 样本

已知 $\varphi = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k, \sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) \triangleq (\varphi_1, \varphi_2)$ $\quad E\varphi_1 = n \cdot EX = n\mu \Rightarrow E\left(\frac{1}{n}\varphi_1\right) = \mu \Rightarrow \frac{1}{n}\varphi_1 = \bar{X}$ 为 μ 的 UMVUE

$E(S^2) = \sigma^2$ $\quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\varphi_2 - \frac{1}{n}\varphi_1^2\right) \Rightarrow S^2$ 为 σ^2 的 UMVUE

修正的样本方差

思考 $X \sim P(\lambda)$ 求 λ 的 UMVUE

例3 $X \sim E(\lambda)$ 求 λ 的 UMVUE

$\sum_{1}^{n} X_k$

$E\varphi = nEX$.

已知 $\varphi = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 是 $E(\lambda)$ 的充分完全统计量

λ 无偏估计是什么? 总体期望: $\frac{1}{\lambda}$ (EX) $\quad E\varphi = nEX = \frac{n}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{n}\varphi = \bar{X}$ 是 $\frac{1}{\lambda}$ 的 UMVUE

$\varphi = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \Gamma(n, \lambda)$

$E(\varphi^{-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-1} f_\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-2} e^{-\lambda x}\,dx$ $\quad \lambda x = t$

$\frac{\lambda}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty} t^{n-2} e^{-t}\,dt$

$= \frac{\lambda}{\Gamma(n)}\Gamma(n-1) = \frac{\lambda}{n-1}$

$\Rightarrow E((n-1)\varphi^{-1}) = E\left(\frac{n-1}{n\bar{X}}\right) = \lambda$

$\Rightarrow \frac{n-1}{n\bar{X}}$ 为 λ 的 UMVUE.

$\varphi = (X_{(1)}, X_{(n)})$

例4: $X \sim U(a, b)$ $\quad a<b$ 未知 $\quad$ 均匀分布的充分完全统计量: $\varphi = (X_{(1)}, X_{(n)})$

不属于指数型分布但有充分完全统计量

用 φ 构造 a, b 的无偏估计

是什么, 再用 φ 表示 / 看 φ 与无偏估计有什么关系. 所以先看 $X_{(1)}, X_{(n)}$ 之期望

$$\begin{cases} E(X_{(1)}) = \frac{1}{n+1}b + \frac{n}{n+1}a \\ E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}b + \frac{1}{n+1}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E\left(\frac{n}{n-1}X_{(1)} - X_{(n)}\right) = a \\ E\left(\frac{n}{n-1}X_{(n)} - \frac{1}{n-1}X_{(1)}\right) = b \end{cases}$$

不考

Cramér-Rao 不等式

定义(正则分布) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x;\theta)$ 满足

$E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2$ 称为 Fisher 信息量 记为 $I(\theta)$

① 参数空间 Θ 是 R^1 中的开区间 只有一个参数单参数、(有限区间 (a,b) 无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 或半无限区间 $(0,+\infty)$ 等)

② 对 $\forall x$ 及 $\theta \in \Theta$, 导数 $\frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)$ 存在

③ $f(x;\theta)$ 的支撑 $\{x: f(x;\theta) > 0\}$ 与 θ 无关

④ $f(x;\theta)$ 的积分与微分可交换 即 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)\,dx = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\,dx = 0$. (1.)

$X \to f(x;\theta)$ 函数

⑤ $E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2$ 存在且 > 0 $\quad$ 则称 X 为正则分布, 上述条件为 C-R 正则性条件.

注：1. 若为离散型分布，…

2. 指数型分布一定是正则分布

3. $E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\cdot \underbrace{f(x;\theta)}_{\text{密度函数}}\,dx = \int_{\{x:f>0\}} \frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)\,dx = 0$

$\frac{1}{f}\cdot f(x;\theta)\cdot f(x;\theta)$

$\int_{\{x:f>0\}}$

X为正则分布

$\Rightarrow D\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2 = I(\theta)$ （若X为正则分布.）

$EX^2 - (EX)^2 = EX^2 - 0$

4. 易見みます. $I(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2 = \int_{\{x:f>0\}} \left|\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right|^2 \underbrace{f(x;\theta)}_{\text{密度函数}}\,dx = \int_{\{x:f>0\}} \frac{1}{f}\left|\frac{\partial}{\partial\theta} f\right|^2 dx$

$\frac{1}{f(x)}$

另一方面 $E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right) = \int_{\{x:f>0\}} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x;\theta)\, f(x;\theta)\,dx$

$\partial_\theta\left(\frac{1}{f}\partial_\theta f\right)$

$\partial_\theta\left(\frac{1}{f}\partial_\theta f\right)$

$-\frac{1}{f(x)}\cdot f\left|\frac{\partial}{\partial\theta} f\right|^2$

$= \underbrace{\int_{\{x:f>0\}} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f\,dx}_{=0?} - \underbrace{\int_{\{x:f>0\}} \frac{1}{f}\left|\frac{\partial}{\partial\theta} f\right|^2 dx}_{=I_\theta}$

(☆) $\int \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f\,dx \overset{\text{if}}{=\!=} \frac{\partial}{\partial\theta}\int\frac{\partial}{\partial\theta} f\,dx = 0.$

从而若☆式成立，则 $I(\theta) = -E_\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right)$

定理（单参数 C-R 不等式） 设总体 X 的密度函数为 $f(x;\theta)$ 满足 C-R 正则性条件 ①–⑤

$g(\theta)$ 是参数空间 Θ 上的可微函数，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本，$\varphi = \varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计.

若满足：$\frac{d}{d\theta}E_\theta\varphi = \frac{d}{d\theta}\int_R\int_R\cdots\int_R \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot\prod_{k=1}^n f(x_k;\theta)\,dx_1\cdots dx_n$

$= \int_R\int_R\cdots\int_R \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{d}{d\theta}\left(\prod_{k=1}^n f(x_k;\theta)\right)dx_1\cdots dx_n$ ⑥ 积分/求导可换序

则方差有下界. $D_\theta(\varphi) \geq \frac{|g'(\theta)|^2}{nI(\theta)}$ 其中 $I(\theta)$ 为 Fisher 信息量. $\frac{|g'(\theta)|^2}{nI(\theta)}$ 称为 C-R 下界.

C-R：$\begin{cases}\text{连续 } \int \\ \text{离散 } \sum\end{cases}$

Mar 29, 2024

$X \sim E(\lambda)$ $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$\varphi = \sum_{k=1}^n X_k \sim \Gamma(n,\lambda)$ $Y = \varphi^{-1} = h(\varphi)$

$EY = \int_R h(x) f_\varphi(x)\,dx$ $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{\sum_{k=1}^n X_k}$

① 知道φ的分布. $EY = \int_R\int_R\cdots\int_R g(x_1, \cdots, x_n)\prod_{k=1}^n f_X(x_k)\,dx_1\cdots dx_n$

② 不知道φ的分布 只知道样本.

$EY = \int_R x f_Y(x)\,dx$

③ 知道Y的分布

$X \sim f(x;\theta)$　① $\theta \in \Theta$　Θ 为 R^1 中的开区间　② $\forall x, \theta$　$\frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)$ 存在　③ $\{x : f>0\}$ 与 θ 无关

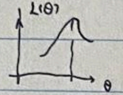
与样本无关
只依赖总体分布
是总体的 Fisher 信息量.

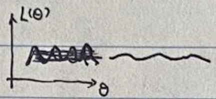
④ $\int_R \frac{d}{d\theta} f(x,\theta)\,dx = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_R f(x;\theta)\,dx = 0$　可交换　⑤ $I(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2 > 0$　Fisher 信息量.

$\{X : X \sim f(x;\theta)\}_{\theta\in\Theta}$ 分布族　是正则分布.　⑥ $\frac{d}{d\theta} E_\theta \varphi = g'(\theta) = \underbrace{\int_R \cdots \int_R \varphi(x_1, x_2, \cdots x_n) \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\right) dx_1 \cdots dx_n}_{\varphi\text{的期望}}$

$$D_\theta(\varphi) \geq \frac{|g'(\theta)|}{n I(\theta)}$$ 方差越小越好

Fisher: $L(\theta) = L(\theta; x_1, \cdots x_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)$





关于 θ 的 依赖少.
参数

突出和曲率有关
θ 的二阶导数.　$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} L(\theta)$ / $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L(\theta)$

$$I(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2 \overset{\text{一定条件下}}{=\!=\!=} -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right)$$

$$nI(\theta) = -nE\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right) = -\sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X_k;\theta)\right) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\sum_{k=1}^{n}\ln f(X_k;\theta)\right) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln\prod_{k=1}^{n} f(X_k;\theta)\right).$$

每个样本又和总体同分布

$$= -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L(\theta; x_1, x_2, \cdots x_n)\right)$$

(2.3) $\iint_{R^n} \frac{\partial}{\partial\theta} \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\,dx_1 \cdots dx_n = 0$

$\frac{\partial}{\partial\theta}$ (- - ——— ——— - - ———)
联合密度函数的积分: 1

考虑一般的: $n=2$　$\iint_{R^2} \frac{\partial}{\partial\theta}\left[f(x_1;\theta) + f(x_2;\theta)\right] dx_1 dx_2$

$= \iint \partial_\theta f(x_1) \cdot f(x_2) + f(x_1) \partial_\theta f(x_2)\, dx_1 dx_2$

$= \underbrace{\int_R \partial_\theta f(x_1)\,dx_1}_{0} \cdot \int_R f(x_2)\,dx_2 + \int_R f(x_1)\,dx_1 \cdot \underbrace{\int_R \partial_\theta f(x_2)\,dx_2}_{0}$

证明: 记 $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$　$dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$　$\Omega = \{\underbrace{x \in R^n}_{= (x_1, \cdots x_n)}\ \ \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta) \neq 0\}$

由于 $E\varphi = g(\theta)$

从而 $g'(\theta) = \frac{d}{d\theta} E\varphi = \frac{d}{d\theta}\iint_\Omega \varphi(x) \cdot \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\,dx = \iint_\Omega \varphi(x) \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\right) dx$

$= \iint_\Omega \varphi(x) \frac{d}{d\theta}\left(e^{\ln \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)}\right) dx$

$= \iint_\Omega \varphi(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_k;\theta)\, e^{\ln\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)}\, dx$

$= \iint_\Omega \varphi(x) \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_k;\theta)\right]\left[\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\right] dx$

e 与指数 等于本身

另一方面, 由 (2.3) 得: $0 = \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial\theta}\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\,dx = \iint \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_k;\theta)\right]\left[\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\right] dx$

从而 $|g'(\theta)|=|g'(\theta)-0\cdot g(\theta)|=\left|\iint_\Omega \varphi(x)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right]\left[\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\right]dx\right.$

$\left.-\iint_\Omega g(\theta)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right]\left[\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)\right]dx\right|$

$=\left|\iint_\Omega \underline{(\varphi(x)-g(\theta))}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_k;\theta)\right]\left[\underline{\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)}\right]dx\right|$

Hölder不等式

$D\varphi \geqslant \frac{|g'(\theta)|}{n\cdot I(\theta)}$

$\int_\Omega |f(x)\cdot g(x)|dx \le \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\underline{\left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}$ $\quad \forall 1<p,q<+\infty$

$p=q=2 \Downarrow$ 有∞时把积分变成其max. $\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$\le\left(\iint_\Omega \underbrace{(\varphi(x)-g(\theta))^2}_{方差}\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)dx\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\iint_\Omega \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_k;\theta)\right|^2\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)dx\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(E(\varphi(x)-g(\theta))^2\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\underline{E(\sum_{k=1}^{n}Y_k)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

其中 $Y_k=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_k;\theta)$

令 $Y=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)$

则 $I(\theta)=EY^2 \quad EY=0$ 且 Y_k 与 Y 同分布

从而 $E(\sum_{k=1}^{n}Y_k)^2=\sum_{k=1}^{n}EY_i^2+\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n}E(Y_i,Y_j)}_{独立}=nEY^2+\sum_{i,j=1}^{n}EY_iEY_j=nI(\theta)$

θ是g(θ)的无偏估计 ~~故~~

~~故~~

验证 泊松 是正则的.

例1. $X\sim P(\lambda)$ 找最小方差无偏估计.

① $\lambda\in(0,+\infty)$ 为R中开区间 ✓ ② $f(x;\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ $\quad \frac{\partial}{\partial\lambda}f(x;\theta)=\frac{x\cdot\lambda^{x-1}}{x!}e^{-\lambda}-\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ ✓

③ $\underline{支撑}$ N 与λ无关.
定义域

④ $\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{d}{d\lambda}f(x;\lambda)=\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{x\lambda^{x-1}}{x!}e^{-\lambda}-\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ ✓

$=\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}-\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=0$

⑤ $\ln f(x;\lambda)=x\ln\lambda-\ln x!-\lambda$

$\frac{d}{d\lambda}\ln f(x,\lambda)=\frac{x}{\lambda}-1 \Rightarrow \underline{I(\lambda)}=E\left(\frac{d}{d\lambda}\ln f(x,\lambda)\right)^2=E\left(\frac{x}{\lambda}-1\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}EX^2-\frac{2}{\lambda}EX+1=\underline{\frac{1}{\lambda}}>0$ ✓

(draft $EX=\lambda \quad DX=\lambda \quad EX^2=DX+(EX)^2=\lambda+\lambda^2$)

$g(\lambda)=\lambda \quad \frac{|g'(\lambda)|}{nI(\lambda)}=\frac{1}{n\frac{1}{\lambda}}=\frac{\lambda}{n}$

$\varphi=\bar{X}$

$E\varphi=g(\lambda)$

$D\varphi=\frac{DX}{n}=\frac{\lambda}{n}$

验证.

例2. 正态 $X\sim N(\mu,1)$ 是正则的

① $\mu\in(-\infty,+\infty)$ ✓ ② $f(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$ ✓ ③ 支撑 $(-\infty,+\infty)$ ✓

④ $\int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial \mu} f(x;\theta)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx$

$x-\mu = t$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0$ ✓

奇函数

⑤ $I(\mu) = E\left(\frac{\partial}{\partial \mu} \ln f(x;\mu)\right)^2 = E|x-\mu|^2 = 1$

$\ln f(x;\mu) = -\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}(x-\mu)^2$

$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln f(x;\mu) = x-\mu$

$x-\mu \sim N(0,1)$ $\quad Ex^2 = Dx + (Ex)^2$

$\Rightarrow N(\mu, 1)$为正则分布

$g(\mu)=\mu$的C-R下界：$\frac{|g'(\mu)|}{n\,I(\mu)} = \frac{1}{n}$

$\varphi = \bar{x}$，$E\varphi = E\bar{x} = \mu$ 最小方差无偏估计

$E\bar{x} = \frac{1}{n} D\bar{x} = \frac{1}{n}$

例3. 均匀分布 $X \sim U(0, \theta)$ 是否正则分布.

①. $\theta \in (0, +\infty)$ ✓. ② $f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0<x<\theta \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ ✓. 可导. ③. 支撑 $(0,\theta)$ ✗. $\Rightarrow$ 不是正则分布

看C-R下界. $\varphi = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ $\quad E\varphi = \theta$ $\quad D\varphi = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$

$g(\theta)$ C-R下界 $\frac{|g'(\theta)|}{n \cdot I(\theta)}$ 无意义.

Apr 2. 2024　C-R 不等式（二项分布 指数分布）

$D(\varphi) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$

相合性（大样本性质），$n\to\infty$　$\varphi=\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n) \to g(\theta)$　$n\to+\infty$

不考

定义：设 $\varphi_n=\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的估计，n 为样本容量

1. 若对 $\forall\, \varepsilon>0$ 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\|\varphi_n - g(\theta)\| \geq \varepsilon)=0$ 即 φ_n 依概率收敛到 $g(\theta)$，则称 φ_n 为 $g(\theta)$ 的相合估计

$\|\cdot\|$ 范数（距离）　$\|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

2. 若 $P(\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = g(\theta))=1$ 则 φ_n 几乎处处收敛到 $g(\theta)$，则称 φ_n 是 $g(\theta)$ 的强相合估计。

① 强相合估计 一定是 相合估计

② 由于样本矩 $\xrightarrow{a.e}$ 总体矩，~~再者多出~~ 从而：若参数是总体矩的函数表出 则矩估计是强相合估计。

例1. $X\sim B(1,p)$　$\hat{p}_{MLE}=\bar{X} \xrightarrow{a.e} EX=p$ 以 $\bar{X}$ 是 p 的强相合估计

例2. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$　$\hat{\mu}_{MLE}=\bar{X}$　$\hat{\sigma}^2_{MLE}=S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \xrightarrow{a.e} DX=\sigma^2$

$\downarrow a.e$

EX

$2^{2^{2^2}}$

§2.3　置信区间（区间估计）

~~三大分布 上侧~~

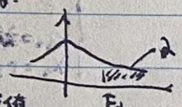
上侧分位数

定义：随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，对给定的 $\alpha\in(0,1)$

若实数 F_α 满足 $P(X>F_\alpha)=\alpha$.

则称 F_α 为 X 的上 α 分位数

$F(X)=P(X\leq x)$



F_α 是横轴上一个点值

性质 ① $P(X>F_\alpha)=\alpha = P(X\leq F_{1-\alpha}) = F(F_{1-\alpha})$

② $F(F_\alpha)=1-\alpha$

③ $P(F_\beta \leq F \leq F_\alpha)=\beta-\alpha$　$(\alpha<\beta)$

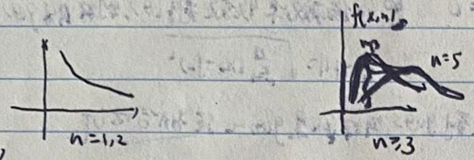
证明：① $\alpha=P(X>F_\alpha)=1-(1-\alpha)=1-P(X>F_{1-\alpha})=P(X\leq F_{1-\alpha})=F(F_{1-\alpha})$

②✓　③ $P(F_\beta < X \leq F_\alpha) = P(X\leq F_\alpha) - P(X\leq F_\beta) = F(F_\alpha)-F(F_\beta) = (1-\alpha)-(1-\beta)$ ← $\beta-\alpha$

卡方分布 若随机变量 X 的概率密度为 $f(x;n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

则称 X 服从自由度为 n 的卡方分布 记为 $X\sim\chi^2(n)$ n 称为自由度

$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ $(\alpha>0)$ 为伽马函数



写成定义

定理 若 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 独立同分布于 $N(0,1)$ 则 $\sum_{k=1}^{n}X_k^2\sim\chi^2(n)$

自由度为n的卡方分布

只考 $\chi^2(n)$ $t(n)$

证明: 记 $\varphi=\sum_{k=1}^{n}X_k^2$ 则 $F_\varphi(x)=P(\sum_{k=1}^{n}X_k^2\le x)$

若 $x\le 0$ 则 $F_\varphi(x)=0$

若 $x>0$ 则 $P(\sum_{k=1}^{n}X_k^2<x)$

$=\iint_{\sum_{k=1}^{n}X_k^2<x}\prod_{k=1}^{n}f_{X_k}(x_k)dx_1\cdots dx_n$ $\{\varphi(x_1,\dots,x_n)<x\}$ $A=\{(x_1,\dots,x_n)\ \sum_{k=1}^{n}x_k^2<x\}$

$P(\,r<n\,)=\iint_{A}f$

$=\iint_{\sum_{k=1}^{n}x_k^2<x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}dx_1\cdots dx_n$

作球坐标变换 $\begin{cases}x_1=r\cos\theta_1\\ x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2\\ x_3=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\\ \vdots\\ x_{n-1}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\ x_n=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_2\sin\theta_{n-1}\end{cases}$ $\boxed{\text{没有 }\theta_n}$

其中 $\begin{cases}0<r<\sqrt{x}\\ 0\le\theta_1\le\pi\\ 0\le\theta_2\le\pi\\ 0\le\theta_{n-2}\le\pi\\ 0\le\theta_{n-1}\le 2\pi\end{cases}$

(国得为错)

~~θ~~

~~公式 $P(\sum_{k=1}^{n}X_k^2<x)$~~

Jacobi 行列式

$J=\dfrac{\partial(x_1\cdots x_n)}{\partial(r,\theta_1,\cdots\theta_{n-1})}=r^{n-1}D(\theta_1,\cdots\theta_{n-1})$

其中 $D(\theta_1,\cdots\theta_{n-1})$ 与 r 无关

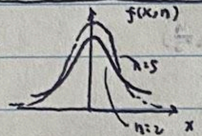
t分布

定义：若随机变量T的概率密度函数为 $f(x;n)=\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{1}{n}x^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ $x\in R$

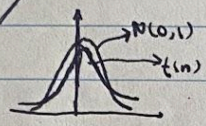
则称T服从自由度为n的t分布 记为 $T\sim t(n)$

$\boxed{\text{定理：若 } X\sim N(0,1) \quad Y\sim\chi^2(n) \quad \text{且 } X,Y \text{ 独立} \quad \text{则 } \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)}$

n是Y的自由度

① 

② $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x;n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$



决定区间估计的好坏

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x;n)=0$

③ 当n=1时 $f(x;1)=\dfrac{\Gamma(\frac{1+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot=\dfrac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}\cdot(1+x^2)^{-1}=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ 柯西分布

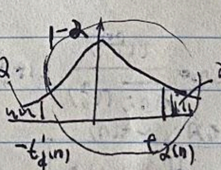
期望不存在

④ 当n≥2时 $\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n}x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ (阶数)

偶·奇=奇函数. 期望为0 方差为 $\frac{n}{n-2}$ (n=2时方差不存在)

⑤ 上α分位数 $t_\alpha(n)$ 即 $P(T>t_\alpha(n))=\alpha$ $T\sim t(n)$

由于 $f(-x;n)=f(x;n)$ 从而 $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$



$t_{1-\alpha}(\alpha)$.

证明② $f(x;n)=\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{1}{n}x^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}=\underbrace{\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}}_{\boxed{(\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}x^2\right)^{\frac{n}{x^2}}}_{\boxed{e}}\exp\underbrace{\left(-\frac{n+1}{2}\frac{x^2}{n}\right)}_{\boxed{-\frac{1}{2}}}$ $n\to+\infty$ $\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}$

指数换底

N(0,1) wocao

T. 结论：$a>0$ $\dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=\dfrac{1}{x^a}+O\left(\dfrac{1}{x^{a+1}}\right)$ $(x\to+\infty)$

等价无穷小

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$\Rightarrow \dfrac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)}=\dfrac{1}{\frac{1}{x^a}+O(\frac{1}{x^{a+1}})}=\dfrac{x^a}{1+O(\frac{1}{x})}\approx x^a$

从而 $P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 < x\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}r^2} r^{n-1} |D(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})|\, dr\, d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}$

$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} |D(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})|\, d\theta_1\cdots d\theta_{n-1} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{n-1}\, dr$

$\overset{r^2=t}{=\!=} C_n \frac{1}{2}\int_0^{x} e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{\frac{n}{2}-1}\, dt \Rightarrow f_\varphi(x) = \frac{d}{dx}F_\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}C_n e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{n}{2}-1} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

~~由于 F_φ $F_\varphi(+\infty)$~~

由于 $F_\varphi(+\infty) = \frac{1}{2}C_n\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{\frac{n}{2}-1}\, dt = 1$

$\overset{t=2y}{=\!=} 2^{\frac{n}{2}-1} C_n\int_0^{+\infty} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y}\, dy = 2^{\frac{n}{2}-1} C_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

$\Rightarrow C_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

注: ① $X \sim \chi^2(n)$ $\quad P(X > \chi^2_\alpha(n)) = \alpha$

② 若 $X \sim N(0,1)$, 则 $X^2 \sim \chi^2(1)$

③ $\chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $X \sim \chi^2(n)$ 则 $EX^k = \frac{2^k\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Rightarrow EX = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 2\cdot\frac{n}{2} = n.$ $\quad DX = 2n$

⑤ 再生性 若 $X \sim \chi^2(n)$ $Y \sim \chi^2(m)$ 且 X, Y 独立 则 $X+Y \sim \chi^2(n+m)$

Pf ⑤: $X \sim \chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\quad Y \sim \chi^2(m) = \Gamma\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\quad X, Y$ 独立

$\Rightarrow X+Y \sim \Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(m+n)$

t分布 (学生氏分布)

定义. 若随机变量 X 的密度函数为 $f(x,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{1}{n}x^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ $\quad x \in R$

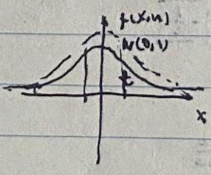
则称 X 服从自由度为 n 的 t 分布, 记为 $X \sim t(n)$

写何之义

定理 (★) 若 $X \sim N(0,1)$ $\quad Y \sim \chi^2(n)$ 且 X, Y 独立

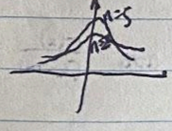
则 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$ 考

密度函数



偏. 支撑R

$n\uparrow$ t 指偏



Apr 7, 2024

标准正态分布 $N(0,1)$ $\quad$ 卡方分布: 设 $X_1\, X_2 \cdots X_n$ 独立同分布于 $N(0,1)$ 则称 $\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ 所服从的分布称为自由度为 n 的卡方分布. 记为 $\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \sim \chi^2(n)$

$X \sim \chi^2(n)$, $EX = n$ $\quad DX = 2n$

$\chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 伽玛函数 $\quad$ 满足再生性 $\quad Y \sim \chi^2(m)$ X, Y 独立 则 $X+Y = \chi^2(m+n)$

X, Y 独立
$f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$
则 f_{X} $f(X)$…
独立

③ $T \sim t(n)$ 则 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 其中 $X \sim N(0,1)$ $Y \sim \chi^2(n)$ X, Y 独立 ⇓ X^2, Y 独立

从而 $DT = ET^2 - (ET)^2 = ET^2$

$$= E\left(\frac{X^2}{Y/n}\right) = nE\left(\frac{X^2}{Y}\right) = nEX^2 E\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{n}{n-2}$$

$X^2 \sim \chi^2(1)$ $EX^2 = 1$

$$\boxed{EY^{-1}} = \int_R \frac{1}{x} f_Y(x)\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-2} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$$

$\Rightarrow \Gamma$

$$\overset{x=2y}{=} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{+\infty} 2^{\frac{n}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-2} e^{-y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{n}{2}-1} = \boxed{\frac{1}{n-2}}$$

F 分布 定义: $f(x; m,n) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} & x>0 \\ 0 \end{cases}$

m 第一自由度
n 第二自由度

$\boxed{\text{定理}(\star)\ 若 X \sim \chi^2(m)\ Y \sim \chi^2(n)\ X, Y 独立\ 则\ \frac{X/m}{Y/n} \sim F(m,n)}$

注: ① 若 $F \sim F(m,n)$ 则 $\frac{1}{F} \sim F(n,m)$

② 若 $T \sim t(n)$ 则 $T^2 \sim F(1,n)$ 常考

$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ $X \sim N(0,1)$ $Y \sim \chi^2(n)$ X, Y 独立.

$T^2 = \frac{X^2}{Y/n} = \frac{X^2/1}{Y/n}$ $X^2 \sim \chi^2(1)$

③ 记 $F_\alpha(m,n)$ 为 F(m,n) 分布的上 α 分位数 则 $F_{1-\alpha}(m,n) = \frac{1}{F_\alpha(n,m)}$

证明: 设 $X \sim F(m,n)$ ~~则 Y =~~ $Y = \frac{1}{X}$ $Y \sim F(n,m)$ 服从…分布

从而 $P(X \le F_{1-\alpha}(m,n)) = 1 - P(X > F_{1-\alpha}(m,n)) = 1-(1-\alpha) = \alpha$

$= P\left(Y \ge \frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\right)$ $\Rightarrow \frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)} = F_\alpha(n,m)$

④ 若 $X \sim F(m,n)$ 则当 $n>2$ 时 $EX = \frac{n}{n-2}$

当 $n>4$ 时 $DX = \frac{n^2(2m+2n-4)}{m(n-2)^2(n-4)}$

Pf ④
假设: $X \sim F(m,n)$
则 $\exists Y \sim \chi^2(m)$ $Z \sim \chi^2(n)$
且 Y, Z 独立 s.t. $X = \frac{Y/m}{Z/n}$

$\Rightarrow EX = E\left(\frac{Y/m}{Z/n}\right) = \frac{n}{m} EY\, E\left(\frac{1}{Z}\right)$ ($EY \to m$, $E\frac{1}{Z} \to \frac{1}{n-2}$)

$= \frac{n}{n-2}$

$DX = EX^2 - (EX)^2$

$EX^2 = E\left(\frac{Y/m}{Z/n}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2}E(Y^2 \cdot Z^{-2})$

$= \frac{n^2}{m^2}E(Y^2)E(Z^{-2})$

EZ^{-2}
$= \int_R \frac{1}{x^2} f_Z(x)\,dx$

$DX = 2n$
$EX = n$
$E(Y^2) = 2n + n^2$

thinking my world Jun Leng?

抽样分布定理

统计量的分布.

定理3.2 设 X_1, X_2, X_n 相互独立 且 $X_k \sim N(\mu_k, \sigma^2)$ $k=1,2,\dots,n$

$A^T A = E$

$A^{-1} = A^T$

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正交矩阵 $Y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k$ $i=1,2,\cdots n$

则 $Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ 相互独立 且 $Y_i \sim N(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \mu_k, \sigma^2)$ $(i=1,2,\dots,n)$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

正交变换 保内积 $\begin{cases} \text{保长度} \\ \text{保角度} \end{cases}$

旋转/对称/平移

矩

等距变换

$Y_i \sim N(\ ,\ )$

正态分布 线性性

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $(X \sim N(c\mu, c^2\sigma^2))$

$E(cX) = c\mu$

$D(cX) = c^2\sigma^2$

$Y \sim N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$

则 $X \pm Y \sim N(\mu \pm \bar{\mu}, \sigma^2 + \bar{\sigma}^2)$

$Y_i \sim N(\ \ )$

$EY_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} EX_k$

$DY_i = \sum_{k=1}^{n} D(a_{ik} X_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 DX_k = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2)\sigma^2 = \sigma^2$

$\|\cdot\|^2 = 1$

E不变+减.
去除多余.

Apr 9, 2024

~~主~~ 证明: 不妨设 $\mu_k = 0$ $\forall k=1,2,\cdots n$ 即 $X_k \sim N(0, \sigma^2)$ 从而 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 联合密度函数为 $f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_k^2}{2\sigma^2}}$

~~令~~ 对给定 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 令 $D = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in R^n : \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \le t_i, i=1,2,\dots,n\}$

则 $P(Y_1 \le t_1, Y_2 \le t_2, \dots, Y_n \le t_n) = P(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} X_k \le t_1, \sum_{k=1}^{n} a_{2k} X_k \le t_2, \cdots, \sum_{k=1}^{n} a_{nk} X_k \le t_n)$ 联合概率.

$P(X \in A) = \iint_A f \, dx$

$$= \iint_D \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_k^2}{2\sigma^2}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

记 $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T$ $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ 作变换 $x = A^{-1} y$ $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \in R^n$ 即 $y = Ax$

由于A为正交矩阵, 从而 $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$, $dx = \pm dy$

$x = A^{-1} y = A^T y$

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots y_n)} \right| = 1.$$

从而 $P(Y_1 \le t_1, Y_2 \le t_2 \cdots Y_n \le t_n) = \int_{-\infty}^{t_n} \cdots \int_{-\infty}^{t_2} \int_{-\infty}^{t_1} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n} y_k^2} dy_1 dy_2 \cdots dy_n = \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{t_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}} dy_k$ (☆)

$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}}$

取极限 $(t_2, \dots, t_n) \to (+\infty, +\infty, \dots, +\infty)$, 则 $P(Y_1 \le t_1, Y_2 \le t_2, \cdots Y_n \le t_n) \to P(Y_1 \le t_1)$

$$\prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{t_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}} dy_k \to \int_{-\infty}^{t_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma^2}} dy_1$$

从而 $Y_1 \sim N(0, \sigma^2)$, 同理 $Y_k \sim N(0, \sigma^2)$ $k=2, \dots, n$ 从而(☆)右边 $= \prod_{k=1}^{n} P(Y_k \le t_k)$

从而 $P(Y_1 \le t_1 \cdots Y_n \le t_n) = \prod_{k=1}^{n} P(Y_k \le t_k)$ 从而 $Y_1 \cdots Y_n$ 独立.

(X, Y)

$F(x, y)$

$F(x, +\infty) = F_X(x)$

$F(+\infty, y) = F_Y(y)$

边际分布函数

$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots dy_2$

$N(0, \sigma^2)$

 若 $\mu_k \ne 0$ 则作变换 $X_k - \mu_k = X_k'$

正态总体 ~~考~~、会用

$\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$ $\frac{n\sigma^2}{n^2}$

μ σ^2

定理3.3 抽样分布定理

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立且都服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布

令 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ $\quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$，则：

① $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$

② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \rightsquigarrow \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

③ $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立 （只有正态分布具此性质）

证明：取 n 阶正交矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ s.t. $a_{1j} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad j = 1, 2, \cdots, n$.

令 $\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ 即 $Y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k \quad i = 1, 2, \cdots, n$

则由 Th3.2 知： $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 相互独立 且： $Y_1 \sim N(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot\mu, \sigma^2) = N(\sqrt{n}\mu, \sigma^2)$

$Y_i \sim N(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot\mu, \sigma^2) = (0, \sigma^2) \quad i = 2, 3, \cdots, n$

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} a_{ik} = 0 \quad \forall i = 2, 3, \cdots, n. \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 0.$

由于 $Y_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} X_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k = \sqrt{n}\,\overline{X} \Rightarrow \overline{X} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1 \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$

又由于 A 为正交矩阵 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2$ 从而 $\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n(\overline{X})^2 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - Y_1^2 = \sum_{k=2}^{n} Y_k^2$

从而 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2 = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{Y_k}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$ $\qquad \frac{Y_k}{\sigma} \sim (0,1) \quad k \geq 2$

▲

注：$n = 2$ $\quad X_1, X_2$ 独立同分布于 $N(\mu, \sigma^2)$

$\overline{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ $\qquad S^2 = \frac{1}{2-1}\left[(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2\right] = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$

$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ $\qquad \left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} = \frac{S^2}{\sigma^2}$

$\Rightarrow \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1) \Rightarrow \chi^2(1)$ $\qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

定理：设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本 $\quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$

则：① $U \stackrel{d}{=} \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ $\qquad$ ② $T \stackrel{d}{=} \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2) \Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ $\qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \Rightarrow \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

例：设 (X_1, X_2) 为取自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本，求 $\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2}$ 的分布

$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ 标准化. $\quad \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$ $\qquad \frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

~~$X_1 + X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$~~

$X_1 + X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ $\qquad \frac{(X_1 + X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

$\Rightarrow \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2} = \frac{\frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2}/1}{\frac{(X_1 + X_2)^2}{2\sigma^2}/1}$ 是否相互独立?

$(X_1 + X_2)^2$ $\quad \boxed{2\overline{X}}$ $\qquad (X_1 - X_2)^2$ $\quad S^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2 = \boxed{2S^2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x_1-x_2 \\ x_1+x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad$ $1+1$ $1-1$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= 2E$

Apr 12, 2024

区间估计 $P(\varphi_1 \le g(\theta) \le \varphi_2)$ 越大越好

定义及方法：设X为总体，$(X_1, X_2, \cdots X_n)$为样本 $\theta \in \Theta$ 未知参数 $\varphi_1 = \varphi_1(X_1, X_2, \cdots X_n)$ $\varphi_2 = \varphi_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是两个统计量，$\varphi_1 \le \varphi_2$

若对 $\gamma \in (0,1)$ $\boxed{\text{有} P(\varphi_1 \le g(\theta) \le \varphi_2) \ge \gamma}$ 则称$[\varphi_1, \varphi_2]$为$g(\theta)$的置信水平为γ的置信区间。

事先给定，控制概率下界 $\gamma \approx 1$ （γ = 0.8, 0.9, 0.95, 0.99 ---）

φ_1：置信下限 φ_2：置信上限 $[\varphi_1, +\infty)$ $(-\infty, \varphi_2]$ 都是有的

若 $\inf\limits_{\theta \in \Theta} P_\theta(\varphi_1 \le g(\theta) \le \varphi_2) = \gamma$ 则称 γ 为置信系数

下确界

$P \ge \frac{1}{2}$ 置信系数.

$P \ge \gamma = \frac{1}{2}$. 置信水平.

注：① $[\varphi_1, \varphi_2]$ 随机区间 长出随机性 包含 $g(\theta)$ 确定的 概率不低于 γ.

$g(\theta)$不具有随机性.

② 若认为"$[\varphi_1, \varphi_2]$ 包含 $g(\theta)$ 的真值"，则 ~~犯错~~ 持此观点犯错误的概率不超过 $1-\gamma$

只是概率上一部分包含

③ 评价标准：可靠度：$P(\varphi_1 \le g(\theta) \le \varphi_2)$

精度：$\varphi_2 - \varphi_1$ 长度：随机变量 精度：求其期望.

~~$E(\varphi_2-\varphi_1)$~~ / $E(\varphi_2-\varphi_1)$ 等

④ 区间估计不唯一

⑤ **方法**：枢轴量法 统计量法

定义：若样本函数~~$G(X_1, X_2, \cdots, X_n)$~~ $G = G(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$ 与参数 θ 有关 ①.

包含未知参数 θ

但其分布已知，则称 G 为枢轴量

②

例：设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $(X_1, \cdots, X_n)$ $\bar{X}$ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$

μ, σ^2 未知 则 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ✓ $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

修正样本方差.

样本的标准差.

是枢轴量

利用枢轴量法建区间估计步骤

Step 1：先给出一个统计量 $T=T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，一般取为参数 $g(\theta)$ 的点估计量

不含未知参数

Step 2：构造 T 与 $g(\theta)$ 的函数 $G(T; g(\theta))$ s.t G 的分布已知，即 G 为枢轴量.

Step 3：找常数 c_1、c_2 s.t $P(c_1 \le \underset{G(T; g(\theta))}{G} \le c_2) \ge \gamma$

Step 4：作变形 $\varphi_1 \le g(\theta) \le \varphi_2 \ge \gamma$：从不等式里把 $g(\theta)$ 解出来.

G的. $g(\theta)$

$$P(\varphi_1 \le g(\theta) \le \varphi_2) \ge \gamma.$$

从而 $[\varphi_1, \varphi_2]$ 为 $g(\theta)$ 的置信水平为 γ 的置信区间.

指数分布

$\lambda e^{-\lambda x}$

设 $X \sim E(\lambda)$ $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为样本 求 λ 的置信水平为 γ 的置信区间

解 ① 取 $T = \lambda_{MLE} = \bar{X}^{-1} = \dfrac{n}{\sum_1^n X_k}$ 　　　正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 有 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

② $\dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{n}\underbrace{\sum X_k}_{\sim \Gamma(n, \lambda)}$ 　　　$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

$(cX \sim \Gamma(n, \frac{\lambda}{c}))$

Γ 分布伸缩性.

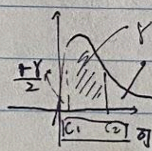
$\lambda \sum X_k \sim \Gamma(n, 1)$

$2\lambda \sum X_k \sim \Gamma(n, \frac{1}{2})$

$n \cdot 2\lambda \frac{1}{T} = \boxed{2\lambda \cdot \sum X_k} \sim \chi^2(2n)$

取 $G = G(T, \lambda) = \dfrac{2\lambda n}{T}$ 则 $G \sim \Gamma(n, \frac{1}{2}) = \chi^2(2n)$

③ 取 c_1, c_2, s.t $P(c_1 \le G \le c_2) \underset{=}{\ge} \gamma$ 　　　$G \sim \chi^2(2n)$



可移动

$\frac{1-\gamma}{2}$.(均衡的 c_1, c_2)

不妨取 c_1, c_2 满足：

$P(G < c_1) = P(G > c_2) = \dfrac{1-\gamma}{2}$

$P(G > c_1) = 1 - \dfrac{1-\gamma}{2} = \dfrac{1+\gamma}{2}$

即：$c_1 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)$ 为 $\chi^2(2n)$ 分布的上 $\frac{1+\gamma}{2}$ 分位数 　$c_2 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)$ 为 $\chi^2(2n)$ 分布的上 $\frac{1-\gamma}{2}$ 分位数.

④ 作变形

$$\gamma = P\Big(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n) \le \underset{2\lambda \sum_1^n X_k}{\underset{\parallel}{\frac{2n\lambda}{T}}} \le \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)\Big)$$

$$P\Bigg(\underbrace{\frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_1^n X_k}}_{\varphi_1} \le \lambda \le \underbrace{\frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_1^n X_k}}_{\varphi_2}\Bigg)$$

此置信区间通过分位数表示的

卡方分布分位数.

$$\left[\frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_1^n X_k}, \frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_1^n X_k}\right]$$

$n=10$ 　$\gamma = 0.95$ 　　$\frac{1+0.95}{2}$ 　$\frac{1-0.95}{2}$

$\chi^2_{0.975}(20)$ 　$n=20$ 　$\alpha = 0.975$

$\chi^2_{0.975}(20) \approx 9.59$

$\chi^2_{0.025}(20) \approx 34.2$

均匀分布 $X \sim U(0,\theta)$ $(x_1,\cdots,x_n)$ 为样本，求 θ 的置信水平为 γ 的置信区间.

利用 $\frac{X_{(n)}}{\theta}$

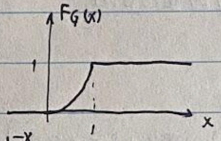
解：求 $\frac{X_{(n)}}{\theta}$ 的分布？ $\underset{\text{分布函数}}{F_{X_{(n)}}(x)} = \underset{\text{总体分布n次方}}{F_X^n(x)} = \begin{cases} 0 & x\le 0 \\ (\frac{x}{\theta})^n & 0<x\le\theta \\ 1 & x>\theta \end{cases}$

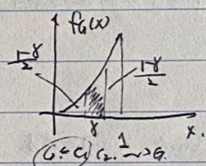
令 $G=\frac{X_{(n)}}{\theta}$ $\underset{\text{G的分布函数}}{\underline{F_G(x)}} = P(X_{(n)} \le \theta \cdot x) = F_{X_{(n)}}(\theta x) = \begin{cases} 0 & \theta x\le 0 \\ (\frac{\theta x}{\theta})^n & 0<\theta x\le\theta \\ 1 & \theta x>\theta \end{cases}$

$\to \begin{cases} 0 & x\le 0 \\ x^n & 0<x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$

取 $c_1、c_2$, s.t $P(\underline{c_1 \le G \le c_2}) = \gamma$

即，$\underset{\text{分布函数之差}}{F_G(c_2) - F_G(c_1)} = \gamma \in (0,1)$





不妨取 $c_1、c_2$ s.t: $P(G<c_1) = P(G>c_2) = \frac{1-\gamma}{2}$

c_1^n

$\boxed{c_1^n = \frac{1-\gamma}{2}}$

$P(G<c_2) = \frac{1+\gamma}{2}$ $\gamma\in(0,1)$

$G\in(0,1)$.

$\boxed{c_2^n = \frac{1+\gamma}{2}}$

$\Rightarrow c_1 = (\frac{1-\gamma}{2})^{\frac{1}{n}}$ $c_2 = (\frac{1+\gamma}{2})^{\frac{1}{n}}$

从而 $\gamma = P\left((\frac{1-\gamma}{2})^{\frac{1}{n}} \le \frac{X_{(n)}}{\theta} \le (\frac{1+\gamma}{2})^{\frac{1}{n}}\right)$

$= P\left(\frac{X_{(n)}}{(\frac{1+\gamma}{2})^{\frac{1}{n}}} \le \theta \le \frac{X_{(n)}}{(\frac{1-\gamma}{2})^{\frac{1}{n}}}\right)$

会用

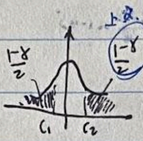
第五节 总体的区间估计

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 估计均值 μ $\begin{cases} 方差已知 \ \sigma^2=\sigma_0^2 \\ 方差未知 \ 用S^2 \end{cases}$ 估计方差 σ^2 $\begin{cases} 均值已知 \\ 均值未知 \end{cases}$

1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma^2=\sigma_0^2$ 已知 求 μ 的 --- γ 的 ----

解. $EX = \bar{x} = \mu$ 考虑 $\bar{X}$ $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n})$

抽样中 样本均值的标准化: $U := \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$



取 c_1, c_2 s.t. $P(c_1 \le U \le c_2) = \gamma$

不妨取 c_1, c_2 s.t. $P(U < c_1) = P(U > c_2) = \frac{1-\gamma}{2}$

即: $c_2 = u_{\frac{1-\gamma}{2}}$ 为标准正态分布的上 $\frac{1-\gamma}{2}$ 分位数.

上分位数

书上是 $\underline{\underline{\text{下分位数}}}$.

$c_1 = -c_2$

从而 $\gamma = P\left(-u_{\frac{1-\gamma}{2}} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \le u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right)$

$= P\left(\bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}} \le \mu \le \bar{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right)$

即 $\left[\bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}, \ \bar{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right]$ 为 μ 的置信水平为 γ 的置信区间 ✓

也是置信系数.

区间长度: $\downarrow \frac{2\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}$ 即精度 $\uparrow$

$\sigma_0, n, \gamma \uparrow$ $\frac{1-\gamma}{2} \downarrow$ $u \uparrow$ 长 $\uparrow$ 精度 $\downarrow$

可靠度

不具有随机性, 就是一个常数

记住.

考试应用题直接用

$\left[\bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}, \ \bar{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right]$

$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}} \le \mu \le \bar{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right) = \underset{0.95}{\gamma}$. 即 $P\left(\mu \in \left[\bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}, \ \bar{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right]\right) = \gamma = 0.95$

~~100组~~ 100个样本均值 100组 10个 100区间

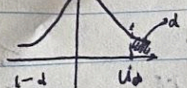
大概会有95个包含 μ

随机变量: $\bar{X}$ Nice! 我 Right!

故区间是随机区间

$P(X \geq u_\alpha) = \alpha$ 与 $\Phi(x)$ 为互补

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$



$\boxed{u_\alpha \Rightarrow \Phi(1-\alpha) \text{ 查表可得值.}}$

$\Phi(u_\alpha) = 1-\alpha$

$\Phi(u_{0.5}) = 0.95$

查表: $u_\alpha = u_{0.5} \approx 1.65$

$\frac{2\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}$ 可靠度 ~~可靠度~~

精度.

$\gamma \uparrow$

$\alpha \downarrow$

u_α 右移

长度越长

精度越差

提高 n 样本容量

Apr 16, 2024

例1. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ σ^2已知 $=4$ $(X_1,\cdots,X_n)$为样本

(1) 当$n=16$时 求μ的置信系数为0.9，0.95的区间长度

$$\frac{2\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{\frac{1-\gamma}{2}} \qquad \frac{2\times 4}{4}\boxed{U_{0.05}}\ 1.65 = \cancel{}\times 1.65 =$$

$$=\Phi(0.95)$$

$\sigma^2=4 \Rightarrow \sigma=2.$

$$\frac{2\times 2}{4}U_{0.05} = \frac{2\times 2}{4}\times 1.65$$

$\gamma=0.9$ $\quad \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}U_{\frac{1-\gamma}{2}} \approx \frac{2\times 2}{\sqrt{16}}\times 1.65$

$\gamma=0.95$ $\quad \frac{2\times 2}{\sqrt{16}}\times U_{0.025} \approx 1.96$

$\frac{0.05}{2}=0.025$

$1-0.025=0.975=$ $\quad \Phi = 1-\alpha = 0.975 \quad 1.96$

(2) n为何值时 使$\mu(\gamma)$置信区间长度不超过1

$$\frac{2\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{\frac{1-\gamma}{2}} = \frac{4}{\sqrt{n}}\times 1.65 \le 1. \quad \text{反解}$$

例2.(2) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

1) 估计样本均值 $\hat{\mu}=\bar{x}=15.06$

2) $\sigma^2=0.05$ 找$\gamma=0.95$的置信区间 $n=6$.

$$\left[\bar{x}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{\frac{1-\gamma}{2}},\ \bar{x}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{\frac{1-\gamma}{2}}\right]$$

$$15.06\pm\frac{\sqrt{0.05}}{\sqrt{6}}U_{0.025} \qquad \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{0.025}$$

$$\Phi(0.975)$$

$$\boxed{U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)}$$

2. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ σ^2未知，求μ的置信水平为γ的 ——

用样本方差代替总体方差 未知

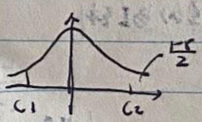
修正的 S^2

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

解: ① $T=\hat{\mu}_{MLE}=\bar{X}$

② $G=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

③ 取 C_1 C_2 s.t. $P(C_1\le G\le C_2)=\gamma$



不妨取 $P(G<C_1)=P(G>C_2)=\frac{1-\gamma}{2}$

$C_1=-C_2=-t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)$ t分布的上$\frac{1-\gamma}{2}$分位数

增加性:D:D:D

分布变了.

④作变形 $\gamma = P\left(-t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \le \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)\right)$

$= P\left(\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \le \mu \le \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)\right)$

区间长度 $L = \frac{2S}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)$ ~~[illegible]~~ S有随机性 L随机变量.

L的期望.难求.

S的期望

S^2的期望.

L^2的期望. $EL^2 = \frac{4}{n} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) ES^2 = \frac{4\sigma^2}{n} t^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)$

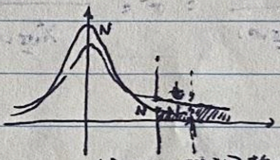
(常数的期望就是常数自己)

$\left(\frac{2S}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\gamma}{2}}\right)^2 = \frac{4\sigma^2}{n} u^2_{\frac{1-\gamma}{2}}$

γ很大

$\frac{1-\gamma}{2}$很小

note P26



短一些. 对于同样α ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

故有 $u_\alpha < t_\alpha(n-1)$.

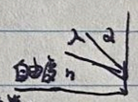
指上分位数的意思.

例5.2 真值在什么范围. μ的区间估计.

$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1),\ \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)\right]$

$\bar{x} = 1259$ $S = \sqrt{\frac{1}{4} \sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{570}{4}}$

设置γ, 自取 $\gamma = 0.95$ $t_{0.025}(5-1) = t_{0.025}(4)$ 是$\frac{\alpha}{2}$分位数



$P\{|t| > \lambda\} = \alpha$.

临界值

偏远的.

$2P(t > \lambda)$

故 $P(t > \lambda) = \frac{\alpha}{2}$

$\lambda = t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$

$t_{\frac{0.05}{2}}(4)$

~~查~~找 $\alpha = 0.05$ $n = 4$

≈ 2.776

$\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$

$\frac{1-\gamma}{2}$

3. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $\mu=\mu_0$已知，求σ^2的置——r区——

解：① $(X_1,\cdots,X_n)$ $X_k\sim N(\mu_0,\sigma^2)$
样本

$\frac{X_k-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)$ $\forall k=1,2,\cdots,n$ $\frac{X_1-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)$

不是指和，是找平方和：$\underbrace{\sum_1^n\left(\frac{X_k-\mu_0}{\sigma}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_1^n(X_k-\mu_0)^2\sim\chi^2(n)}$ 总体.

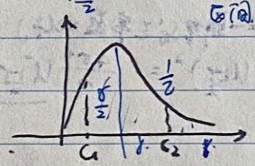
取 c_1 c_2 s.t $P(G<c_1)=P(G>c_2)=\frac{1-\gamma}{2}$

即 $c_1=\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n)$ $c_2=\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)$

从而 $\gamma=P\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n)\le\frac{1}{\sigma^2}\sum_1^n(X_k-\mu_0)^2\le\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)\right)$

$=P\left(\frac{\sum_{k=1}^n(X_k-\mu_0)^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)}\le\sigma^2\le\frac{\sum_1^n(X_k-\mu_0)^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n)}\right)$

$\gamma=\left[\frac{\sum_1^n(X_k-\mu_0)^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)}\le\sigma^2\le\frac{\sum_1^n(X_k-\mu_0)^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n)}\right]$ 样本.



4. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ μ未知，求σ^2的---γ——
用样本均值代替

解：$G=\frac{1}{\sigma^2}\sum_1^n(X_k-\bar{X})^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
用的方差

$\left[\frac{\sum_{k=1}^n(X_k-\bar{X})^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)},\ \frac{\sum_1^n(X_k-\bar{X})^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}\right]$

拿概率论 移 100分!

不考

其它区间估计
都可以考

两正态总体的区间估计

设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ X, Y 独立 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 与 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$ 分别为取自 X 与 Y 的样本

估计: ① $\mu_1 - \mu_2$ Behrens-Fisher 问题

② $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

两正态总体的抽样分布定理:

设 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_k$ $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$

$\bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{1}^{m} Y_k$ $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{1}^{m}(Y_k - \bar{Y})^2$

则: (1) $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

(2) $$F \overset{d}{=} \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

(3) 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时

$$T \overset{d}{=} \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{m+n-2}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} \sim t(m+n-2)$$

Pf: (1) X, Y 独立 $\Rightarrow \bar{X}, \bar{Y}$ 独立 $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{1}{n}\sigma_1^2)$ $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{1}{m}\sigma_2^2)$

$$\Rightarrow \bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{1}{n}\sigma_1^2 + \frac{1}{m}\sigma_2^2)$$

再作标准化. #

(2) F分布(2个卡方分布的比值)

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1) \qquad \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1)$$

S_1^2, S_2^2 独立

(3) $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{各\ \frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \qquad \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

和 $$\Rightarrow \frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

期中20号 ~单正态分布区间估计

目图…

Apr 23, 2024

习题课.

$\boxed{书题18}$ $X \sim E(\frac{1}{\theta})$ $EX=\theta$ $D\varphi \geq \frac{|g'(\theta)|^2}{nI(\theta)}$ $E\varphi = g(\theta)$

正则分布：5条件 ①~⑤ $g(\theta)=\theta$

无偏估计. 样本均值.

⑤ $\frac{d}{d\theta}E\varphi = \iint_{R^n} f(x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\,dx_1 \cdots dx_n$

左边 = 1

右边 = $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{n}\sum x_k$

18. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体的样本.

$f(x;\theta) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{\theta}{x^2} & x > 0 \end{cases}$

总体的样本. $\theta > 0$ 未知. 问 $X_{(1)}$ 是否完备.

指数族分布 支撑 $\theta > \ldots$ 定义出发 F

$F_{X_{(1)}} = 1-(1-F_X(x))^n = \begin{cases} 0 \\ 1-\left(\frac{\theta}{x}\right)^n & x > 0 \end{cases}$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le \theta \\ \int_\theta^x \frac{\theta}{t^2}\,dt & \end{cases}$

$\Rightarrow f_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{n\theta^n}{x^{n+1}} & x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u(X_{(1)}) = 0.$

$EU(X_{(1)}) = 0.$

若 $\exists u(\cdot)$ s.t. $EU(X_{(1)}) = 0$. a.e. $\theta > 0$

即 $E(u(X_{(1)})) = \int_0^{+\infty} u(x)\frac{n\theta^n}{x^{n+1}}\,dx = 0.$

$\Leftrightarrow \int_\theta^{+\infty}\frac{u(x)}{x^{n+1}}\,dx = 0 \quad \theta > 0 \ (a.e.)$

$\frac{d}{d\theta}\int_\theta^{+\infty}\cdots dx = \frac{u(\theta)}{\theta^{n+1}} = 0 \quad \theta > 0\ (a.e.)$

③. $f(x;\theta)=\begin{cases} e^{\theta-x} & x>0 \\ 0 & x\le\theta . \end{cases}$

(1) $X_{(1)}-\theta$ 分布

(2) $\theta \cdots \gamma$ 区间

(1) $F_{X_{(1)}}(x)=1-(1-F_X(x))^n=\begin{cases} 0 & x\le\theta \\ 1-e^{n(\theta-x)} & x>\theta \end{cases}$

令 $Y=X_{(1)}-\theta$

$F_Y = F_{X_{(1)}}(x+\theta)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 1-e^{nx} & x>0 \end{cases}$

取 c_1, c_2 s.t $P(c_1\le Y\le c_2)=\gamma$.

不妨取 c_1, c_2. s.t $P(Y<c_1)=P(Y>c_2)=\frac{1-\gamma}{2}$

$1-e^{nc_1}$ || e^{nc_2}

$\left[X_{(1)}+\frac{1}{n}\ln\frac{1-\gamma}{2},\ X_{(1)}+\frac{1}{n}\ln\frac{1+\gamma}{2}\right]$.

置信水平.

④. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $(X_1, X_2, \dots X_n)$ 样本 证明 $[X_{(1)}\ X_{(n)}]$ 为 μ 的 $1-\frac{1}{2^{n-1}}$ 置信区间

证：只需证 $P(X_{(1)}\le\mu\le X_{(n)})=1-\frac{1}{2^{n-1}}$

$P(X_{(1)}\le\mu\le X_{(n)})=P(X_{(1)}\le\mu,\ \mu\le X_{(n)})=P(X_{(1)}\le\mu)-\underline{P(X_{(1)}\le\mu,\ X_{(n)}<\mu)}$

不独立，不能拆开.

$A=\{X_{(1)}\le\mu\}$ $B=\{X_{(n)}\ge\mu\}$ $P(AB)=P(A-A\bar{B})=P(A)-P(A\bar{B})$

$=P(X_{(1)}\le\mu)-P(X_{(n)}<\mu)$

$1-(1-\Phi(0))^n-\Phi^n(0)$

$=1-(\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{2})^n$

$F_{X_{(n)}}(x)=F_X^n(x)$

$F_{X_{(1)}}(x)=1-[1-F_X(x)]^n$

$F_X(x)=P(X\le x)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

两正态总体 不考

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ X, Y 独立 $(X_1,\cdots,X_n)$ $(Y_1,\cdots,Y_m)$

记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_k-\bar{X})^2$

$\bar{Y}=\frac{1}{m}\sum_{1}^{m}Y_k$ $S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{1}^{m}(Y_k-\bar{Y})^2$

估计 1. $\mu_1-\mu_2$ Behrens-Fisher 问题

2. σ_1^2/σ_2^2

1. 当 σ_1^2 σ_2^2 已知时，求 $\mu_1-\mu_2$ 的 … γ … 区间

解：$\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{1}{n}\sigma_1^2)$　$\bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{1}{m}\sigma_2^2)$

作差 $\Rightarrow$ $\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{1}{n}\sigma_1^2+\frac{1}{m}\sigma_2^2)$

作标准化：$G=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sigma_1^2+\frac{1}{m}\sigma_2^2}} \sim N(0,1)$

枢轴量

从而 $P(-U_{\frac{1+\gamma}{2}} < G < U_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \gamma$

2. 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知时，求 $\mu_1-\mu_2$ … γ

$\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, (\frac{1}{n}+\frac{1}{m})\sigma^2)$

$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$　$\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$　独立

$\frac{1}{\sigma^2}[(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2] \sim \chi^2(n+m-2)$

$\Rightarrow$ $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{m+n-2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}} \sim t(m+n-2)$

$\Rightarrow P(-t_{\frac{1+\gamma}{2}}(m+n-2) \le G \le t_{\frac{1+\gamma}{2}}(m+n-2)) = \gamma$

3. 当 μ_1, μ_2 已知时，求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ … γ …

解：$\frac{X_k-\mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1)$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_1^2}(X_k-\mu_1)^2}_{\text{n自由度}} \sim \chi^2(n)$

同理　$\underbrace{\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{k=1}^{m}(Y_k-\mu_2)^2}_{\text{m自由度}} \sim \chi^2(m)$

$G \stackrel{d}{=} \frac{m}{n}\dfrac{\sum_1^n(X_k-\mu_1)^2}{\sum_1^m(Y_k-\mu_2)^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n,m)$　　$P(F_{\frac{1-\gamma}{2}}(n,m) \le G \le F_{\frac{1+\gamma}{2}}(n,m)) = \gamma$

4. 当 μ_1, μ_2 未知时，求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

解，样本均值 ~~替代~~　$\bar{X}$　$\frac{n-1}{m-1}$

$G \stackrel{d}{=} \frac{m}{n}\dfrac{\sum_1^n(X_k-\bar{X})^2}{\sum_1^m(Y_k-\bar{Y})^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n-1, m-1)$

不考.

Apr 26, 2024

大样本情形 $(n \geq 30)$

林德伯格 — 莱维中心极限定理

设 $\{X_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 独立同分布 $EX_k = \mu$ $DX_k = \sigma^2$ $\forall k$

记 $Y_n = \dfrac{\sum_{1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2} \to \sqrt{n}\,\sigma}$ 则 $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \forall x \in R.$

依分布收敛.(逐点收敛)

记为 $Y_n \xrightarrow[\text{(依分布收敛)}]{L} N(0,1)$

或: $Y_n \overset{\cdot}{\underset{\text{近似服从}}{\sim}} N(0,1)$

由 $Y_n \overset{\cdot}{\sim} N(0,1) \Rightarrow \sum_{1}^{n} X_k \overset{\cdot}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_k \overset{\cdot}{\sim} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

例1: $X \sim \overset{\text{二项}}{B(1,p)}$ $(X_1, \dots, X_n)$ 为样本. n 较大 求 p 的置信水平为 γ 的置信区间.

解: 记 $T_n = \sum_{1}^{n} X_k$ 则由中心极限定理: $\dfrac{T_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$

从而当 $n \gg 1$ 时有: $P(-u_{\frac{1-\gamma}{2}} \leq \dfrac{T_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_{\frac{1-\gamma}{2}}) \approx \gamma$

解 p 记 $C = u_{\frac{1-\gamma}{2}}$ 则: $(T_n - np)^2 \leq np(1-p)C^2$

$\Delta = n^2C^4 > 0$ 从而不等式有解 $\hat{p}_L \leq p \leq \hat{p}_u$

其中: $\hat{p}_L, \hat{p}_u$ 为 $(T_n - np)^2 = np(1-p)C^2$ 的根

例2 $X \sim \overset{\text{泊松}}{P(\lambda)}$ $(X_1, \cdots, X_n)$ 求 $p \cdots \gamma \cdots$

解: 由中心极限. 记 $T_n = \sum_{1}^{n} X_k$ 则 $\dfrac{T_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$

从而 $P(-u_{\frac{1-\gamma}{2}} \leq \dfrac{T_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq u_{\frac{1-\gamma}{2}}) \approx \gamma$

$\Rightarrow P(\hat{\lambda}_L \leq \lambda \leq \hat{\lambda}_u) \approx \gamma$ 其中 $\hat{\lambda}_L$ $\hat{\lambda}_u$ 为二次方程 $(T_n - n\lambda)^2 = n\lambda u^2_{\frac{1-\gamma}{2}}$ 的根

4道例题 考1道

☆

见 Notes

1. $X_1 \cdots X_n$ 为 $f(x;\theta) = \begin{cases} 0 & x \leq \theta \\ \frac{\theta}{x^2} & x > \theta \end{cases}$ 的总体的样本 $(\theta > 0)$. 证 $X_{(1)}$ 是充分统计量

2. X: $f(x;\theta) = \begin{cases} e^{\theta - x} & x > \theta \\ 0 & x \leq \theta \end{cases}$ (1) 证 $X_{(1)} - \theta$ 分布与 θ 无关 (2) 求 θ 置信水平为 γ 的置信区间

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $X_1 \cdots X_n$ $X_{(1)}, X_{(n)}$ 相应最小最大的次序统计量. 证 $[X_{(1)}, X_{(n)}]$ 为 μ 的置信水平为 $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ 的置信区间

4. $X_1 \cdots X_n$ 样本, 分布 $f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} & x > 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$

找出 θ 无偏估计的方差的尽可能大的下界.

May 23, 2024
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Chapter 3 假设检验

X θ

1 2
$\theta<0$ $\theta>0$

§3.1 问题的提法

由样本观测值出发判断关于总体的一个"看法"
假设

定义：1. 零假设：需要检验的假设，又称为原假设，记为 H_0

2. 对立假设：零假设的对立面，又称为备择假设，记为 H_a 或 H_1

设 X $\theta\in\Theta$ Θ 为参数空间 假设检验问题通常表示为：$H_0: \theta\in\Theta_0 \longleftrightarrow H_a: \theta\in\Theta_1$

其中：$\Theta_0\subset\Theta$ $\Theta_1\subset\Theta$ $\Theta_0\cap\Theta_1=\phi$

定义：1. 检验法：给出一个规则，对给定的样本观测值 $(x_1,\cdots x_n)$ 进行明确表态：

接受 H_0 还是拒绝 H_0

2. 接受域：对于给定的检验法，使得零假设 H_0 被接受的样本观测值构成的集合，
记为 S_1

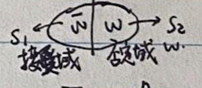
3. 否定域 —————— 拒绝 ——————

记为 S_2 或 W = $\boxed{\text{与检验法对应}}$

$(x_1,\cdots,x_n)$ R^n

样本空间 $\mathscr{X}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n: \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)>0\}$

$X\sim E(\lambda)$ $(0,+\infty)$
$\mathscr{X}$：总体的支撑



$\overline{W}=\mathscr{X}^n-W$

H_0 $\theta\in\Theta_0$ $\longleftrightarrow$ H_a $\theta\in\Theta_1$

$\Theta_0\cap\Theta_1=\phi$ W：否定域 $W=\{(x_1\cdots x_n)\in\mathscr{X}^n: \text{拒绝} H_0\}$ 样本观测值构成集合

① H_0 为真 $(x_1\cdots x_n)\in W$ 弃真（第一类错误） 控制犯第一类错误的概率上限（检验水平）

② H_0 为真 $(x_1\cdots x_n)\notin W$ 取真 ✓

③ H_0 为假 $(x_1,\cdots x_n)\in W$ 弃伪 ✓

④ H_0 为假 $(x_1,\cdots,x_n)\notin W$ 取伪（第二类错误） 错误

定义：用 $P(A|\theta_0)$ 表示当参数 θ 的真值为 θ_0 时事件 A 发生的概率，或记为 $P(A|\theta=\theta_0)$ 或 $P_{\theta_0}(A)$

① 称 $\beta_W(\theta_0) = P((X_1,\cdots,X_n)\in W \mid \theta=\theta_0) = P(\text{拒绝 } H_0 \mid \theta=\theta_0)$ 为 W 的功效函数.

大写

随机变量

② 称 $L_W(\theta_0) = P((x_1,\cdots,x_n)\notin W \mid \theta=\theta_0) = P(\text{接受 } H_0 \mid \theta=\theta_0)$ 为 W 的操作特性函数，简称 OC 函数

注：① $\beta_W(\theta_0) + L_W(\theta_0) = 1$ （自变量：θ_0）

② 若 $\theta_0 \in \Theta_0$，则 $\beta_W(\theta_0)$ 为弃真概率.

若 $\theta_0 \in \Theta_1$，则 $\beta_W(\theta_0)$ 为弃伪概率

若 $\theta_0 \in \Theta_0$，则 $L_W(\theta_0)$ 为取真概率

若 $\theta_0 \in \Theta_1$，则 $L_W(\theta_0)$ 为取伪概率

定义.

称 $\sup_{\theta\in\Theta_0} \beta_W(\theta)$ 为否定域 W 的检验水平（或显著性水平 或 水平）

（拒绝 H_0）

$\boxed{\text{犯第一类错误概率上确界（意思）}}$

控制.　　弃真概率

$\alpha \approx 0$　（0.1 0.5 …）

定义：设否定域 W 的检验水平为 α，若对一切检验水平不超过 α 的否定域 $\tilde{W}$，均有：

样本观测值构成的集合

$\beta_W(\theta) \geq \beta_{\tilde{W}}(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_1$

弃伪概率最大

则称 W 为检验水平为 α 的一致最大功效否定域　简称 UMP 否定域

对 Θ_1 内所有元素一致.（集合一致）

若单元素 则把一致去掉).

犯第二类错误最小

$\theta\in\Theta_0$.

对 Θ_0 一致.

［弃伪 ≥

取伪 ≤

∵常用 β_W 写 少用 L_W 写.］

May 7, 2024　　插 $\hat{\theta}_1$ $\hat{\theta}_2$　　$D_\theta\hat{\theta}_1 \leq D_\theta\hat{\theta}_2$　$\exists \theta_0$ s.t $D_{\theta_0}\hat{\theta}_1 < D_{\theta_0}\hat{\theta}_2$　有效性（期中填空题）

定义：设否定域 W 的检验水平为 α，若 $\beta_W(\theta) \geq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_1$　则称 W 为检验水平为 α 的无偏否定域

弃真概率 $\leq \alpha$　　$\boxed{\text{弃伪概率} \geq \alpha.}$　$\beta_W(\theta)|_{\theta\in\Theta_1}$：弃伪概率.

定义：若 W 是水平为 α 的无偏否定域，且对任意水平为 α 的无偏否定域 $\tilde{W}$ tilde{W}.

均有：$\beta_W(\theta) \geq \beta_{\tilde{W}}(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_1$　则称 W 是水平为 α 的一致最大功效无偏否定域（UMPU 否定域）

小概率原理　假设检验

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

检验均值 $\begin{cases} \text{方差已知} & U\text{检验法} \\ \text{方差未知} & T\text{检验法} \end{cases}$

方差 $\begin{cases} \text{均值已知} & \chi^2\text{检验法}\ (n) \\ \text{均值未知} & (n-1) \end{cases}$

1. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$　$\sigma^2 = \sigma_0^2$ 已知，检验总体 X 的均值 μ 与已知的 μ_0 是否有显著性差异（问题）

转化为假设检验问题

解：1° 提出统计假设　$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_a: \mu \neq \mu_0$

2° 选取检验统计量　设 $(x_1, \cdots, x_n)$ 为样本　$\bar{X}$　取 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

则当 H_0 为真时　$X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$　从而 $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$　从而 $U \sim N(0,1)$

3° 给出否定域　$W = \{(x_1, \cdots, x_n)\ |U| \geq C\}$

设检验水平为 α 则：$\sup\limits_{\mu \in H_0} P_W(\mu) = \alpha = P_W(\mu_0) = P(|U| \geq C \mid \mu = \mu_0)$

真　非真

由于当 $\mu = \mu_0$ 时，$U \sim N(0,1)$　从而

$C = U_{\frac{\alpha}{2}}$ 为 $N(0,1)$ 分布的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数

4° 作出判断

例：设 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 已知，对于问题 $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_a: \mu \neq \mu_0$

由 U 检验法知：水平为 α 的否定域为　$W = \{(x_1, \cdots, x_n): \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| > U_{\frac{\alpha}{2}}\}$

从而，接受域为 $\bar{W} = \bar{W}(\mu_0) = \{(x_1, \cdots, x_n): \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| \leq U_{\frac{\alpha}{2}}\}$

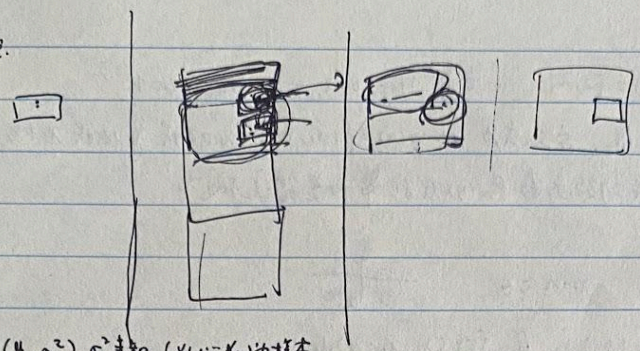
对固定的 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 定义　$S = S(x_1, \cdots, x_n) = \{\mu \in R,\ (x_1, \cdots, x_n) \in \bar{W}(\mu)\}$

$= \{\mu \in R: |\mu - \bar{x}| \leq \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} U_{\frac{\alpha}{2}}\}$

即 S 为 $[\bar{x} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} U_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{x} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} U_{\frac{\alpha}{2}}]$.

大纲
软件二段.

创造
情报



2. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ σ^2未知 $(X_1,\cdots X_n)$为样本

检验: $H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_a: \mu\neq\mu_0$ $\qquad \bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

设水平为 α $\qquad \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

解. 取 $T=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 则当 H_0 为真时 $T\sim t(n-1)$ 从而 $|T|$ 应较小

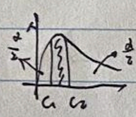
从而否定域为 $W=\{(x_1,\cdots,x_n): |T|>C\}$

由于 W 水平为 α 从而 $\rho_W(\mu_0)=P(|T|>C \mid \mu=\mu_0)=\alpha$

$\Rightarrow C=t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 为 $t(n-1)$ 分布的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数

3. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $\mu=\mu_0$已知 $(x_1,\cdots,x_n)$为样本

检验 H_0 $\sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow H_a$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$



α. 解: 取 $G=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu_0)^2$ 则当 H_0 为真时 $G\sim\chi^2(n)$

从而否定域为 $W=\{(x_1,\cdots X_n): G<C_1$ 或 $G>C_2\}$.

W 满足 $\rho_W(\sigma_0^2)=P(G<C_1$ 或 $G>C_2 \mid \sigma^2=\sigma_0^2)=\alpha$

$=P(G<C_1 \mid \sigma^2=\sigma_0^2)+P(G>C_2 \mid \sigma^2=\sigma_0^2)$

不妨取 $P(G<C_1 \mid \sigma^2=\sigma_0^2)=P(G>C_2 \mid \sigma^2=\sigma_0^2)=\frac{\alpha}{2}$

从而 $C_1=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ $\qquad C_2=\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$

4. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ μ未知 检验 $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow H_a$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$

取 $G=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 则当 H_0 为真时, $G\sim\chi^2(n-1)$

May 10, 2024

作业 习题三 1, 2

§3.2 N-P引理及似然比检验法 会用结论.

设X密度函数为 $f(x;\theta)$ 考虑检验问题 $H_0:\theta=\theta_1 \leftrightarrow H_a:\theta=\theta_2$

参数空间 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$

$(x_1,\cdots,x_n)$ 样本

似然函数. $L(\theta)=L(\theta;x_1,\cdots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\theta)$

定理(Neyman-Pearson引理) ~~考虑~~ 对 $\forall\alpha\in(0,1)$

~~$H_0:\theta=\theta_1 \leftrightarrow H_a:\theta=\theta_2$~~

假设集合 W_0 型如 $W_0=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):L(\theta_2,x_1,\cdots,x_n)>\lambda_0 L(\theta_1;x_1\cdots x_n)\}$

(否定域)

~~设 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为~~

$(L(\theta_2)>\lambda_0 L(\theta_1))$

$W_0\leftarrow$ 确定 λ_0

其中 λ_0 满足 $\int\!\!\int_{W_0}L(\theta_1;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n=\alpha$ 样本的联合密度出现在 W_0 积分 $\Rightarrow$ 概率 $P((x_1,\cdots,x_n)\in W_0|\theta=\theta_1)$

(2.1). 原假设成立

W_0的检验水平: α.

则对任意否定域 $W\subset\mathbb{R}^n$ 只要 $P_W(\theta_1)\le\alpha$ (2.2) 就有 $P_{W_0}(\theta_2)\ge P_W(\theta_2)$ (2.3)

表述: 的弃真/弃伪概率

弃真概率 $\le\alpha$

记 $\lambda=\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\dfrac{L(\theta_2;x_1\cdots x_n)}{L(\theta_1;x_1\cdots x_n)}$

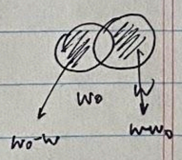
则 $W_0=\{(x_1,\cdots x_n):\lambda(x_1\cdots x_n)>\lambda_0\}$ λ似然比

证明: 设 W 为检验水平不超过 α 的否定域 即

$P_W(\theta_1)\le\alpha$

则 $P_{W_0}(\theta_2)-P_W(\theta_2)=P((x_1\cdots x_n)\in W_0|\theta=\theta_2)-P((x_1\cdots x_n)\in W|\theta=\theta_2)$

$=\int\!\!\int_{W_0}L(\theta_2;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n-\int\!\!\int_W L(\theta_2;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n$



$=\int\!\!\int_{W_0-W}L(\theta_2;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n-\int\!\!\int_{W-W_0}L(\theta_2;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n$

由于 $W_0-W\subset W_0$ 从而对 $\forall(x_1\cdots x_n)\in W_0-W$ 有 $L(\theta_2;x_1\cdots x_n)>\lambda_0 L(\theta_1;x_1\cdots x_n)$

又由于 $W-W_0\subset\overline{W_0}$ 从而对 $\forall(x_1\cdots x_n)\in W-W_0$ 有 $L(\theta_2;x_1\cdots x_n)\le\lambda_0 L(\theta_1;x_1\cdots x_n)$

从而: $P_{W_0}(\theta_2)-P_W(\theta_2)\ge\underbrace{\int\!\!\int_{W_0-W}}_{放小}\lambda_0 L(\theta_1;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n-\underbrace{\int\!\!\int_{W-W_0}}_{放大}\lambda_0 L(\theta_1;\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n$

$=\lambda_0\left(\int\!\!\int_{W_0}L(\theta_1;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n-\int\!\!\int_W L(\theta_1;x_1\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n\right)$

$=\lambda_0(P_{W_0}(\theta_1)-P_W(\theta_1))\ge0$

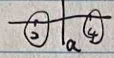
均匀分布

例：设 $X \sim U(0,\theta)$ 　 $\theta \in \Theta = \{2,4\}$ 　 考虑 $H_0: \theta=2 \longleftrightarrow H_a: \theta=4$

设 (x_1, x_2) 为样本观测值，否定域为 $W = W(a) = \{(x_1,x_2): x_1>2$ 或 $x_2>2$ 或 $\underline{x_1+x_2>a}\}$

其中 $a \in (2,4)$ 试求 W 的功效函数 $\rho_W(\theta)$ 及犯~~第~~两类错误概率

$EX = \frac{\theta}{2} = E\bar{X}$ 　 $\frac{x_1+x_2}{2} \approx \frac{\theta}{2}$ 　 $x_1+x_2 \approx \theta$

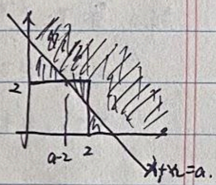


解：$\rho_W(\theta) = P((X_1,X_2) \in W \mid \theta) = \iint_W f_{联合}(x_1,x_2;\theta)\,dx_1dx_2$

$= \iint_W \frac{1}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x_1)\, I_{(0,\theta)}(x_2)\, dx_1 dx_2$

$= \iint_{W \cap \{0<x_1<\theta\} \cap \{0<x_2<\theta\}} \frac{1}{\theta^2}\, dx_1 dx_2$ 　 $\theta \in \{2,4\}$

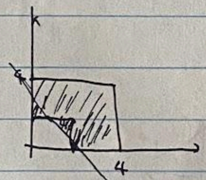
当 $\theta=2$ 时 　 $\rho_W(2) = \iint_{\substack{(x_1,x_2)\in W \\ 0<x_1<2 \\ 0<x_2<2}} \frac{1}{4}\, dx_1 dx_2$



$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}(4-a)^2 = \frac{1}{8}(4-a)^2$

当 $\theta=4$ 时 　 $\rho_W(4) = \iint_{\substack{(x_1,x_2)\in W \\ 0<x_1<4 \\ 0<x_2<4}} \frac{1}{16}\, dx_1 dx_2 = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(4-a)^2 + 4\times 2 + 2\times 2\right]^2$

$= \frac{1}{32}(4-a)^2 + \frac{3}{4}$



弃真 P 　 $\frac{1}{16}(4-a)^2$

$\sim a$

取伪 P 　 $1 - \left[\frac{1}{32}(4-a)^2 + \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{32}(4-a)^2$

(P 和 $\neq 1$)

定理：设 X 密度函数为 $f(x;\theta)$　$\theta \in \Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$

$(x_1 \cdots x_n)$ 为样本　考虑 $H_0: \theta=\theta_1 \leftrightarrow H_a: \theta=\theta_2$

设 $\lambda = \lambda(x_1 \cdots x_n) = \dfrac{L(\theta_2; x_1 \cdots x_n)}{L(\theta_1; x_1 \cdots x_n)}$ 为似然比.

若 ① $f(x;\theta)$ 的支撑 $\{x \in R: f(x;\theta) > 0\}$ 与 θ 无关

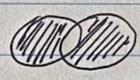
② 当 $\theta = \theta_1$ 时，$\lambda(x_1 \cdots x_n)$ 的分布函数为连续函数

将似然比作随机变量

则对 $\forall \alpha \in (0,1)$　$\exists \lambda_0 > 0$　s.t $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \lambda(x_1 \cdots x_n) > \lambda_0\}$ 为水平为 α 的唯一最大功效否定域.

其中"唯一"含义为：若 W 也是水平为 α 的最大功效否定域

则集合 $(W - W_0) \cup (W_0 - W)$ 的勒贝格测度为 0.



阴影部分的面积为 0.

几乎处处一样　两个集合几乎重合.

[illegible]

证明：由于当 $\theta=\theta_1$ 时 $\lambda(x_1, \cdots, x_n)$ 的分布函数连续

从而对 $\alpha > 0$　$\exists \lambda_0 > 0$　s.t: $P(\lambda(x_1 \cdots x_n) > \lambda_0 \mid \theta = \theta_1) = \alpha$

即：对 $\forall \alpha > 0$　$\exists \lambda_0 > 0$　s.t　$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \lambda(x_1 \cdots x_n) > \lambda_0\}$ 的检验水平为 α

从而由 N-P 引理知：W 为最大功效否定域

即：对 $\forall$ 满足 $P((x_1 \cdots x_n) \in W \mid \theta_1) \le \alpha$ 的 W，成立 $\rho_{W_0}(\theta_2) \ge \rho_W(\theta_2)$

下证 若 $\underset{\text{测度}}{\text{meas}}\{(W_0 - W) \cup (W - W_0)\} > 0$ 则 $\rho_{W_0}(\theta_2) > \rho_W(\theta_2)$

易见 $\rho_{W_0}(\theta_2) - \rho_W(\theta_2) = P((x_1 \cdots x_n) \in W_0 \mid \theta_2) - P((x_1 \cdots x_n) \in W \mid \theta)$

$= \int\int_{W_0} L(\theta_2; x_1 \cdots x_n) dx_1 \cdots dx_n - \int\int_W L(\theta_2; x_1 \cdots x_n) dx_1 \cdots dx_n$

$= \int\int_{W_0 - W} L(\theta_2; x_1 \cdots x_n) dx_1 \cdots dx_n - \int\int_{W - W_0} L(\theta_2; x_1 \cdots x_n) dx_1 \cdots dx_n$

要么：

① 若 $\text{meas}\{W_0 - W\} > 0$　由于 $W_0 - W \subset W_0$

从而对 $\forall (x_1 \cdots x_n) \in W_0 - W$　有 $\lambda(x_1 \cdots x_n) > \lambda_0$

此外由于 $W - W_0 \subset \overline{W_0}$　从而对 $\forall (x_1 \cdots x_n) \in W - W_0$

有 $\lambda(x_1 \cdots x_n) \le \lambda_0$

从而 $\rho_{W_0}(\theta_2) - \rho_W(\theta_2) \geq \lambda_0 \iint_{W_0 - W} L(\theta_1; x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n - \lambda_0 \iint_{W - W_0} L(\theta_1; x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$

$= \lambda_0 \iint_{W_0} L(\theta_1; x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n - \lambda_0 \iint_W L(\theta_1; x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$

$= \lambda_0 \left(\rho_{W_0}(\theta_1) - \rho_W(\theta_1) \right)$

≥ 0

从而 $\rho_{W_0}(\theta_2) \geq \rho_W(\theta_2)$

② 要么 $\text{meas}\{W - W_0\} > 0$ 则令 $D = \{(x_1 \cdots x_n): \lambda(x_1 \cdots x_n) = \lambda_0\}$

由于当 $\theta = \theta_1$ 时 $\lambda(x_1 \cdots x_n)$ 分布函数连续 $F(x) = P(X \leq x)$ 则 $P(X = a) = F(a) - F(a-0)$
a点左极限
此时相等了

从而：$\lambda(x_1 \cdots x_n)$ 取单点值 λ_0 的概率为0

即：$P(\lambda(x_1 \cdots x_n) = \lambda_0 \mid \theta_1) = P((x_1 \cdots x_n) \in D \mid \theta_1) = 0$ ☆ $= \iint_D L(\theta_1; x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$

又由于 $D \subset \mathcal{X}^n := \{(x_1 \cdots x_n): \prod_{k=1}^{n} f(x_k; \theta) > 0\}$ 与θ无关 D的概率是0

从而 对 $\forall (x_1 \cdots x_n) \in D$ $L(\theta_1; x_1 \cdots x_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k; \theta_1) > 0$ ↓推导

D的测度为0

从而由 ☆ $\Rightarrow$ $\text{meas}\{D\} = 0$ 即 D为零测集. 说明:

从而 $\iint_{W - W_0} L(\theta_1; x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \iint_{W - (W_0 \cup D)} L(\theta_2; x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$
$\because D$为零测集

另一方面：由 $W_0 \cup D = \{(x_1 \cdots x_n): \lambda(x_1 \cdots x_n) \geq \lambda_0\}$

$W - (W_0 \cup D) \subset \overline{W_0 \cup D} = \{(x_1 \cdots x_n) : \lambda(x_1 \cdots x_n) < \lambda_0\}$.

从而 $\iint_{W - (W_0 \cup D)} L(\theta_2; x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n < \iint_{W - (W_0 \cup D)} \lambda_0 L(\theta_1; x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$

$= \lambda_0 \iint_{W - W_0} L(\theta_1; x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$

从而 $\iint_{W - W_0} L(\theta_2; x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \leq \lambda_0 \iint_{W - W_0} L(\theta_1; x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$

(平移过来了)

定理 2.3: 在 Th 2.1 的条件下 有 $\rho_{W_0}(\theta_2) \geq \alpha = \rho_{W_0}(\theta_1)$ 无偏否定域
$\theta = \theta_1 \leftrightarrow \theta = \theta_2$

May 11, 2024 $H_0: \theta = \theta_1 \leftrightarrow H_1: \theta = \theta_2$

$\lambda(x_1 \cdots x_n) = \dfrac{L(\theta_2; x_1 \cdots x_n)}{L(\theta_1; x_1 \cdots x_n)}$

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \lambda(x_1 \cdots x_n) > \lambda_0\}$ 否定域 $(\lambda_0 \to W_0)$

s.t $\rho_{W_0}(\theta_1) = \alpha$
确定W_0 此时满足 P48 ①②: 才有W_0一定存在且唯一

Th 2.1 $\iint_{W_0-W} L(\theta_2; x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n \geq \iint_{W_0-W} \lambda_0 L(\theta_1; x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$ $^{(*)}$

积分区域可能 W_0-W 是零测集 故有「=」

$L(\theta_2) > \lambda_0 L(\theta_1)$ in W_0-W

Th 2.2 $\text{meas}\{W_0-W\}>0$ 才能说 $^{(*)}$ 是「>」为严格大于

似然比检验法处理检验问题

例：$X\sim N(\mu,1)$ 检验.

$H_0: \mu=0 \longleftrightarrow H_a: \mu=2$

$(x_1\cdots x_n)$ $\alpha=0.05$ 求(最大功效否定域) UMP否定域

只有似然比检验法

解：似然函数 $L(\mu; x_1\cdots x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n (x_k-\mu)^2} = L(\mu)$

似然比 $\lambda(x_1\cdots x_n) = \frac{L(2)}{L(0)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n (x_k-2)^2}}{e^{-\frac{1}{2}\sum x_k^2}} = e^{2n\bar{x}-2n}$

从而否定域为 $W_0 = \{(x_1\cdots x_n): e^{2n\bar{x}-2n} > \lambda_0\}$

$= \{(x_1\cdots x_n): \bar{x} > c\}$ for some c

(单增).

且满足 $0.05 = \sup_{\mu\in\Theta_0} \beta_{W_0}(\mu) = \beta_{W_0}(0) = P(\bar{x}>c \mid \mu=0)$.

$= P(\sqrt{n}\bar{x} > \sqrt{n}c \mid \mu=0)$.

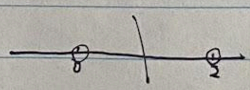
$\mu=0$ $X\sim N(0,1)$

$\bar{x}\sim N(0,\frac{1}{n})$ $\Rightarrow \sqrt{n}c = u_{0.05}$

$\frac{\bar{x}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \sim N(0,1)$ $\Longrightarrow W_0 = \{(x_1\cdots x_n): \bar{x} > \frac{1}{\sqrt{n}}u_{0.05}\}$.

$(\sqrt{n}\bar{x})$

由NP知一定为最大功效否定域.



$E\bar{x} = Ex = \mu$

例12 $X\sim B(1,p)$ $p\in\{p_1,p_2\}$ 考虑 $H_0: p=p_1 \longleftrightarrow H_a: p=p_2$ 水平为 α $p_1<p_2$

解. $L(p;x_1\cdots x_n)=p^{\sum x_k}(1-p)^{n-\sum x_k}$

$f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x}$

$$\lambda(x_1\cdots x_n)=\frac{L(p_2)}{L(p_1)}=\left[\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right]^{\sum_1^n x_k}\left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^n$$

记 $T=\sum_1^n x_k$ 则否定域为 $W_0=\{(x_1\cdots x_n):\ \lambda(x_1\cdots x_n)>\lambda_0\}$

$=\{(x_1\cdots x_n):\ T>C\}$. for some C

不用写 C 和 λ_0 之关系

$\boxed{C\text{的确定：通过控制水平}}$

满足 $\varphi_{W_0}(p_1)=P(T>C\mid p=p_1)=\alpha$.

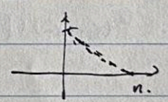
当 $p=p_1$ 时 $X\sim B(1,p_1)$

$\Rightarrow T=\sum_1^n x_k\sim B(n,p_1)$

从而 $P(T>C\mid p=p_1)=\sum_{k>C}\binom{n}{k}p_1^k(1-p_1)^{n-k}=\alpha$.

关于 C 递减. $C:0\sim n$

离散的.



易见，对给定的 $\alpha\in(0,1)$ 不一定存在 C 使上式成立.

从而寻求近似：找整数 C_0 s.t. $\sum_{k=C_0}^{n}p_1^k(1-p_1)^{n-k}>\alpha>\sum_{k=C_0+1}^{n}p_1^k(1-p_1)^{n-k}$

从而 W_0 近似为 $\{(x_1\cdots x_n):\ \sum_1^n x_k>C_0\}$ (控制水平不一定 $=\alpha$).

§3.4 广义似然比检验 只考单正态

$H_0.\ \theta<\theta_1 \leftrightarrow H_a:\theta>\theta_1$ 似然比法 没用.

X 密度函数为 $f(x;\theta)$ $\theta\in\Theta$ $\Theta_0\neq\phi$ $\Theta_0\subsetneq\Theta$

考虑 $H_0:\theta\in\Theta_0\longleftrightarrow H_a:\theta\in\Theta-\Theta_0$

$(x_1\cdots x_n)$

似然函数. $L(\theta;x_1\cdots x_n)=\prod_{k=1}^n f_k(x_k;\theta)$

令 $L(\Theta)=\sup_{\theta\in\Theta}L(\theta;x_1\cdots x_n)\ \underline{\underline{\text{若}\hat\theta_{MLE}\text{存在}}}\ L(\hat\theta_{MLE};x_1\cdots x_n)$

$L(\Theta_0)=\sup_{\theta\in\Theta_0}L(\theta;x_1\cdots x_n)$

$\lambda(x_1\cdots x_n)=\dfrac{L(\Theta)}{L(\Theta_0)}$，称为广义似然比.

易见：$\lambda \geq 1$

若 $\hat{\theta}_{MLE} \in \Theta_0$，则 $\lambda = 1$

$\hat{\theta}_{MLE} \approx \theta$ 真值

从而，若 H_0 成立 则 $\underline{\hat{\theta}_{MLE} \text{ 应大概率} \in \Theta_0}$

此时 $\lambda \approx 1$

从而若 $\lambda \gg 1$ 则拒绝 H_0

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) : \lambda > \lambda_0\}$ 形式的否定域。

通过显著水平确定 λ_0。

W_0 满足 $\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} P_{W_0}(\theta) = \alpha$

注 $\varphi = \varphi(x_1 \cdots x_n)$ 为充分统计量。

即 $L(\theta; x_1 \cdots x_n) = g(\varphi, \theta) h(x_1 \cdots x_n)$

从而 $\lambda(x_1 \cdots x_n) = \dfrac{\sup\limits_{\theta \in \Theta} g(\varphi,\theta) \cancel{h}}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} g(\varphi,\theta) \cancel{h}} = \sigma(\varphi)$

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) : \sigma(\varphi) > \lambda_0\} = \{(x_1 \cdots x_n) : \varphi(x_1 \cdots x_n) \in B\}$ for some set B

$\boxed{1.\ X \sim N(\mu, \sigma_0^2) \quad \sigma_0^2 \text{已知}}$ 考虑 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_a: \mu \neq \mu_0$

$(x_1 \cdots x_n) \quad \alpha$

解. $\underline{\Theta = R} \quad \underline{\Theta_0 = \{\mu_0\}}$

$L(\mu) = L(\mu; x_1 \cdots x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_1^n (x_k - \mu)^2}$

$L(\hat{\Theta}) = \sup\limits_{\mu \in R} L(\mu) = L(\bar{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_1^n (x_k - \bar{x})^2}$

$L(\hat{\Theta}_0) = L(\mu_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_1^n (x_k - \mu_0)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(\sum_1^n (x_k - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2\right)}$

从而广义似然比为 $\lambda = \lambda(x_1 \cdots x_n) = \dfrac{L(\hat{\Theta})}{L(\hat{\Theta}_0)} = e^{\frac{n}{2\sigma_0^2}(\bar{x} - \mu_0)^2}$

$U = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

H_0 成立 $\Rightarrow U \sim N(0,1)$

$\Rightarrow |U|$ 应较小

$\Rightarrow W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) : |U| > C\}$

$C = U_{\frac{\alpha}{2}}$

从而否定域为 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) : e^{\frac{n}{2\sigma_0^2}(\bar{x} - \mu_0)^2} > \lambda_0\} = \{(x_1 \cdots x_n) : |\bar{x} - \mu_0| > c\}$，for some C.

W_0 应满足 $\sup\limits_{\mu \in \Theta_0} P_{W_0}(\mu) = P_{W_0}(\mu_0) = \alpha. = P(|\bar{x} - \mu_0| > c \mid \mu = \mu_0) = P\left(\left|\underbrace{\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}}_{\text{标准正态绝对值}}\right| > \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0} c \,\middle|\, \mu = \mu_0\right)$

$\mu = \mu_0 \Rightarrow X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2) \Rightarrow \bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0} c = U_{\frac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow W_0 = \left\{(x_1 \cdots x_n) : \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| > U_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$

2. σ^2未知. ----

解. $\theta=(\mu,\sigma^2)$ $\quad \Theta = R\times(0,+\infty)$ $\quad \Theta_0=\{\mu_0\}\times(0,+\infty)$

$$L(\theta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_k-\mu)^2}$$

$$L(\hat{\Theta}) = L(\hat{\mu}_{MLE},\hat{\sigma}^2_{MLE}) = L(\bar{x}, S_n^2)$$

$$=\left(\frac{n}{2\pi\sum_1^n(x_k-\bar{x})^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

$$L(\hat{\Theta}_0)=\sup_{\sigma^2>0} L(\mu_0,\sigma^2) = L\left(\mu_0, \frac{1}{n}\sum_1^n (x_k-\mu_0)^2\right) = \left(\frac{n}{2\pi\sum_1^n(x_k-\mu_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{L(\hat{\Theta})}{L(\hat{\Theta}_0)} = \left(\frac{\sum_1^n(x_k-\mu_0)^2}{\sum_1^n(x_k-\bar{x})^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\sum(x_k-\mu_0)^2 = \sum(x_k-\bar{x}+\bar{x}-\mu_0)^2$$

$$=\sum(x_k-\bar{x})^2+\underbrace{2\sum(x_k-\bar{x})(\bar{x}-\mu_0)}_{0}+\underbrace{\sum(\bar{x}-\mu_0)^2}_{与k无关.}$$

$n(\bar{x}-\mu_0)^2.$

$$=\left(1+\frac{n\cdot(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_1^n(x_k-\bar{x})^2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

$$\triangleq \left(1+\frac{T^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

其中 $T=\sqrt{\frac{n(n-1)(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_1^n(x_k-\bar{x})^2}} = \frac{\sqrt{n(n-1)}\,(\bar{x}-\mu_0)}{\sqrt{\sum_1^n(x_k-\bar{x})^2}} = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{x}-\mu_0)}{S} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

广义似然比.

↓

否定域

$\Rightarrow w_0=\{(x_1\cdots x_n):\ \lambda>\lambda_0\}$ $\qquad |T|\uparrow\ \lambda\uparrow.$

$=\{(x_1\cdots x_n):\ |T|>c\}$

「求C」

w_0应满足 $\sup_{\theta\in\Theta_0}\ \rho_{w_0}(\mu) = \sup_{\sigma^2>0} P(|T|>c\mid \mu=\mu_0)=\alpha.$

$=P(|T|>c\mid\mu=\mu_0)$

$\mu=\mu_0 \Rightarrow X\sim N(\mu_0,\sigma_0^2)$

$\Rightarrow T\sim t(n-1)$ 与σ^2无关.

$\Rightarrow c=t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

May 14, 2024 $\quad H_0:\theta\in\Theta_0 \leftrightarrow H_a:\theta\in\Theta-\Theta_0$

$L(\theta)=\prod_{k=1}^n f(x_k,\theta)$

$L(\hat{\Theta})=\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta)$

$L(\hat{\Theta}_0)=\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta)$

$\lambda=\frac{L(\hat{\Theta})}{L(\hat{\Theta}_0)}$ $\quad \lambda(x_1\cdots x_n).$ $\quad W_0=\{(x_1\cdots x_n):\lambda(x_1\cdots x_n)>\lambda_0\}$

31.

P111. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 有无系统偏差. 方差未知. $\alpha = 0.05$

$H_0: \mu = 1277 \longleftrightarrow H_a: \mu \neq 1277$

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): |T| > c\}$

$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad c = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(4).$

$\mu_0 = 1277 \quad n = 5$

若 $|T| > \mu_0$ 则否定 H_0. 即有系统偏差.

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ μ 未知 检验 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

解: $\theta = (\mu, \sigma^2)$ $\quad \Theta = R \times (0, +\infty)$ $\quad \Theta_0 = \{(\mu, \sigma) \in \Theta \quad \sigma^2 = \sigma_0^2\} = R \times \{\sigma_0^2\}$

似然函数 $L(\mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n (x_k - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}$

$$L(\hat{\Theta}) = L(\mu_{MLE}, \hat{\sigma}^2_{MLE}) = L(\bar{x}, \underset{\text{未修正的}}{S_n^2}) = \left(\frac{n}{\underset{\text{修正的}}{2\pi(n-1)S^2}}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

$$L(\hat{\Theta}_0) = \sup_{\mu \in R} L(\mu, \sigma_0^2) = L(\bar{x}, \sigma_0^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{n-1}{2\sigma_0^2} S^2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{L(\hat{\Theta})}{L(\hat{\Theta}_0)} = \left(\boxed{\frac{n\sigma_0^2}{(n-1)S^2}}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}n + \boxed{\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}}}$$

$$\Rightarrow W_0 = \{(x_1 \cdots x_2): \lambda > \lambda_0\} = \{(x_1 \cdots x_n) \quad G \in B\}$$

取 $G = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, 则: ~~当 H_0 为真时~~

λ 关于 G 先减后增 且当 H_0 为真时, $G \sim \chi^2(n-1)$
(对G求导)

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) \quad G < c_1 \text{ 或 } G > c_2\}$ 且满足 $\sup_{\theta \in \Theta_0} P_{W_0}(\theta) = P(a < c_1 \text{ 或 } a > c_2 | \sigma^2 = \sigma_0^2) = \alpha$

 从而可取 $c_1 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \qquad c_2 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

例: X 折断力 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$H_0: \sigma^2 = 64 \longleftrightarrow H_a: \sigma^2 \neq 640$

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \ G < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $G > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$G = \frac{1}{640} \sum_{1}^{10} (X_k - \bar{X})^2 \qquad \underline{n=10, \ \alpha = 0.05}$

例: 设 X 密度函数为 $f(x, \mu) = \begin{cases} e^{-(x-\mu)} & x \geq \mu \\ 0 & x < \mu \end{cases} \qquad \mu \in R.$

利用广义 —— 检验: $H_0: \mu = 0 \longleftrightarrow H_a: \mu \neq 0.$

解: $\Theta = R \qquad \Theta_0 = \{0\}$

$L(\mu) = \begin{cases} e^{-\sum_1^n x_k + n\mu} & X_{(1)} \geq \mu \\ 0 & 其他 \end{cases}$ 最小的

对 $\underline{\forall (x_1, \cdots x_n)} \in \mathcal{X}^n = \{(x_1 \cdots x_n): \prod_{k=1}^n f(x_k, \mu) > 0\}. = \{x: f(x;\mu) > 0\}^n = \underline{[\mu, +\infty)}^n$

n个支撑构成的乘积空间

有 $L(\hat{\Theta}) = \sup_{\mu \in R} e^{-\sum x_k + n \cdot \mu} = e^{-\sum x_k + n X_{(1)}}$

$L(\hat{\Theta}_0) = \begin{cases} e^{-\sum x_k} & X_{(1)} \geq 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

当 $X_{(1)} < 0$ 时 $\lambda > \lambda_0$ 拒绝 H_0
$\lambda = +\infty$

当 $X_{(1)} > 0$ 时 $\lambda(x_1 \cdots x_n) = e^{nX_{(1)}}$

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) \ \ X_{(1)} < 0$ 或 $\lambda > \lambda_0\}.$

$= \{(x_1 \cdots x_n) \ \ X_{(1)} < 0$ 或 $X_{(1)} > c\}$

且 W_0 满足: $\alpha = \beta_{W_0}(0) = P(X_{(1)} < 0$ 或 $X_{(1)} > c \mid \mu = 0)$

$= P(X_{(1)} > c \mid \mu = 0) = 1 - (1 - e^{-nc})$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{n} \ln \alpha$

$\Rightarrow W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): X_{(1)} < 0$ 或 $X_{(1)} > -\frac{1}{n} \ln \alpha\}.$

当 $\mu = 0$ 时 $f(x; 0) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow F_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-nx} & x \geq 0 \end{cases}$

两正态总体 (不考)

设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ $\quad X, Y$ 独立 $(X_1 \cdots X_n)$ $(Y_1\cdots Y_m)$

记 $\bar X = \frac{1}{n}\sum_1^n X_k$ $\quad \bar Y=\frac{1}{m}\sum_1^m Y_k$ $\quad S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_k-\bar X)^2$ $\quad S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_1^m (Y_k-\bar Y)^2$

设检验水平为 α

1. 当 μ_1 μ_2 未知时 检验 $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_a: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

(双侧).

解: Θ $\quad \theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$

$\Theta = R^2 \times (0,+\infty)^2$

$\Theta_0 = \{(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2) \in \Theta : \sigma_2^2 = \sigma_1^2\}$

$L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2) = L(\mu_1,\sigma_1^2)\cdot L(\mu_2,\sigma_2^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_1^n (x_k-\mu_1)^2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\right)^m e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_1^m (y_k-\mu_2)^2}$

$\Rightarrow L(\hat\Theta) = L(\hat\mu_{1MLE}, \hat\mu_{2MLE}, \hat\sigma_{1MLE}, \hat\sigma_{2MLE}) = L\left(\bar X, \bar Y, \frac{n-1}{n}S_1^2, \frac{m-1}{m}S_2^2\right)$

$$= \left(\frac{n}{2\pi(n-1)S_1^2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{m}{2\pi(m-1)S_2^2}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{m+n}{2}}$$

求 $L(\hat\Theta_0) = \sup_{(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2)} L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_1^2)$.

可以证明: 对 $\forall \sigma_1^2, \sigma_2^2>0$ $\quad L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ 在 $(\mu_1,\mu_2)=(\bar X,\bar Y)$ 取 max 而和方差值处.

即: $\sup_{\mu_1,\mu_2} L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2) = L(\bar X,\bar Y,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ $\quad$ 与 $\sigma_1^2\sigma_2^2$

从而 $L(\hat\Theta_0) = \sup_{\sigma_1^2>0} (\bar X,\bar Y,\sigma_1^2, \sigma_1^2) = L(\bar X,\bar Y,\hat\sigma_1^2, \hat\sigma_1^2)$.

$\hat\sigma_1^2 = \frac{1}{m+n}\left((n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2\right)$ $\quad \Rightarrow L(\hat\Theta_0) = \left(\frac{m+n}{2\pi\left((n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2\right)}\right)^{\frac{m+n}{2}} \times e^{-\frac{m+n}{2}}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{L(\hat\Theta)}{L(\hat\Theta_0)} = \left(\frac{n}{n+m}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{m}{n+m}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1+\frac{(m-1)S_2^2}{(n-1)S_1^2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1+\frac{(n-1)S_1^2}{(m-1)S_2^2}\right)^{\frac{m}{2}}$$

H_0 √. $\sigma_1^2=\sigma_2^2$: $\quad \frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$.

$F(n-1,m-1) \sim \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$

令 $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$ 则: $\lambda = C_{m,n}\left(1+\frac{m-1}{n-1}\cdot\frac{1}{F}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1+\frac{n-1}{m-1}F\right)^{\frac{m}{2}}$

且当 H_0 为真时, $F\sim F(n-1,m-1)$ 易见 λ 关于 F 先减后增

$\Rightarrow W_0 = \{(x_1\cdots y_n): F<C_1 \text{ 或 } F>C_2\}$

且满足: $P(F<C_1 \text{ 或 } F>C_2 \mid H_0\text{为真}) = \alpha$.

从而可取 $C_1 = F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$, $\quad C_2 = F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$.

$\boxed{\text{作业: 习题三. 3,4}}$

[这名学生太厉害 懂了]... 大学生, 就吧 只看结果 面试

May 17, 2024

假设检验 单参数 3.1总结

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ XY独立 $(X_1\cdots X_n)$ $(Y_1\cdots Y_n)$ $\bar X,\ \bar Y$ $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_k-\bar X)^2$ $S^2=\frac{1}{m-1}\sum(Y_k-\bar Y)^2$

2. 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时, 检验 $H_0: \mu_1=\mu_2 \longleftrightarrow H_a: \mu_1\neq\mu_2$

(σ^2未知).

解: $\theta=(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)$ $\quad \Theta=R^2\times(0,+\infty)$ $\quad \Theta_0=\{(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)\in\Theta:\mu_1=\mu_2\}$.

$$L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{m+n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_1^n(X_k-\mu_1)^2+\sum_1^m(Y_k-\mu_2)^2\right)}$$

$$L(\hat\Theta)=\sup_{\Theta} L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)$$

在参数空间的上确界 $=\sup_{\Theta} L(\bar X,\bar Y,\sigma^2)$ 　　其中上确界时有 $\mu_1=\bar X$ $\mu_2=\bar Y$, 故化为一元函数极值

$$=\left(\frac{m+n}{2\pi(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}\right)^{\frac{m+n}{2}} e^{-\frac{m+n}{2}}$$

$$L(\Theta_0)=\sup_{\substack{\mu_1\in R\\ \sigma^2>0}} L(\mu_1,\mu_1,\sigma^2)$$

在小集合上的上确界

令 $\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\mu_1}\ln L(\mu_1\,\mu_1\,\sigma^2)=0\\ \frac{\partial}{\partial(\sigma^2)}\ln L(\mu_1\,\mu_1\,\sigma^2)=0\end{cases}$ 解得最大值点 $\Rightarrow\begin{cases}\tilde\mu_1=\frac{1}{m+n}(n\bar X+m\bar Y)\\ \tilde{\sigma}^2=\frac{1}{m+n}\left((n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2+\frac{mn}{m+n}(\bar X-\bar Y)^2\right)\end{cases}$

故最大值 $=\left(\frac{1}{2\pi\tilde\sigma_2}\right)^{\frac{m+n}{2}}e^{-\frac{m+n}{2}}$

故广义似然比: $\lambda=\left(1+\frac{1}{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}\frac{mn}{m+n}(\bar X-\bar Y)^2\right)^{\frac{m+n}{2}}$

构造否定域 $W_0=\{\underbrace{(x_1\cdots y_m)}_{样本}:\underline{\lambda>\lambda_0}\}$

若H_0为真 则:

$\bar X\sim N(\mu_1,\frac{\sigma^2}{n})$ $\quad \bar X-\bar Y\sim N\left(0,\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\sigma^2\right)$

$\bar Y\sim N(\mu_1,\frac{\sigma^2}{m})$. $\quad \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ $\quad \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$

从而 $\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m+n-2)$

记 $\Rightarrow T:=\frac{\bar X-\bar Y}{\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\,\sigma}\Bigg/\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{(m+n-2)\sigma^2}}\sim t(m+n-2)$ (已消了σ)

t分布 ~~标准正态分布~~ 卡方分布去自由度...

且 $\lambda = (1+c_{m,n}T^2)^{\frac{m+n}{2}}$ λ 关于 $|T|\uparrow$

从而 $W_0=\{(x_1\cdots y_m)\quad |T|>c\}$ 找到 T

W_0 满足 $\sup\limits_{\substack{\mu_1\in R\\ \sigma^2>0}} P(\ |T|>c\ |\ \mu_1=\mu_2)=\alpha.$ $\Rightarrow c=t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2).$

(|T|的分布与 μ_1 σ^2 两参数无关)

当 $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，未知时 检验 $H_0:\mu_1=\mu_2 \longleftrightarrow H_a:\mu_1\neq\mu_2$

:Behtens - fisher 问题

解: $\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m})$

$\Rightarrow \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\sim N(0,1)$

取 $\xi=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}$ 则当 H_0 为真时，$\xi\sim N(0,1)$

(用 ξ 作检验统计量
$W_0=\{(\cdots),|\xi|>c\}$. 无效，ξ 里有未知参数.
故 ξ 不能作)

思路: 将总体方差替代为样本方差. S_1^2 S_2^2

取 $T:=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}}$ T不依赖未知参数，但此时分布不知道.

当 H_0 为真时，T的分布相当复杂，且依赖 $\boxed{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$ 不能用. 含未知参数.
精确分布

T的近似分布: 近似服从 $t(k)$ 分布 $\frac{(\frac{1}{n}S_1^2+\frac{1}{m}S_2^2)^2}{\frac{1}{n-1}(\frac{S_1^2}{n})^2+\frac{1}{m-1}(\frac{S_2^2}{m})^2}$

$W_0:\{(x_1,\cdots y_m):\ |T|>c\}.\ =\alpha.$

$$\boxed{c\ \approx\ t_{\frac{\alpha}{2}}(k)}$$

《广义似然比检验法》众多检验法中的一个.

议：类多单子系

§3. 单参数情形的假设检验

X ~~F(x, θ)~~ $\theta \in \Theta = (a, b)$ $-\infty \le a < b \le +\infty$

$N(\mu, 1)$

$N(0, \sigma^2)$

单参数指数型分布： 概率函数(或密度函数)： $f(x;\theta) = S(\theta)h(x)e^{Q(\theta)V(x)}$ (3.1)

其中：$h(x) \ge 0$ (与θ参数无关)

$Q(\theta)$ 关于 θ 严格↑

定理3.1 设X为单参数指数型分布 型如 (3.1)

只考第一个相关

对检验问题 $H_0: \theta \le \theta_1 \longleftrightarrow H_a: \theta > \theta_1$ (☆)

若对 $\alpha \in (0,1)$ $\exists c$ s.t $P\left(\sum_{k=1}^{n} V(X_k) > c \mid \theta = \theta_1\right) = \alpha$ (3.2)

则 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_{k=1}^{n} V(x_k) > c\}$ 为(☆)的 $\underbrace{\ }_{\text{水平为}\alpha\text{的}}$ UMP否定域 (3.3)

(一致最大功效)

证明：似然函数 $L(\theta) = S^n(\theta)\left(\prod_{k=1}^{n} h(x_k)\right) e^{Q(\theta)\sum_{1}^{n} V(x_k)}$

由(3.2)知：$\beta_{W_0}(\theta_1) = \alpha$

1°. 证明：$\sup_{\theta \le \theta_1} \beta_{W_0}(\theta) = \beta_{W_0}(\theta_1) = \alpha$ 即 W_0 的水平为 α

对 $\forall \theta_0 < \theta_1$，考虑 $H_0: \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_a: \theta = \theta_1$ (3.4)

令 $\alpha' = \beta_{W_0}(\theta_0)$

$$\lambda_1 = \frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)} = \frac{S^n(\theta_1)}{S^n(\theta_0)} e^{(Q(\theta_1) - Q(\theta_0))\sum_1^n V(x_k)}$$

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) \ \sum_1^n V(x_k) > c\}$

$= \{(x_1 \cdots x_n) \ \lambda_1 > \lambda_0'\}$ for some constant λ_0'

从而由 N-P 引理知：W_0 为 (3.4) 的检验水平为 α_1 的 UMP 否定域

且由 Th 2.3 和 W_0 是 (3.4) 的无偏否定域，即 $\beta_{W_0}(\theta_1) \ge \alpha = \beta_{W_0}(\theta_0)$

2°. 证明，对(☆)的任意水平不超过 α 的否定域 W

恒有 $\beta_{W_0}(\theta) \ge \beta_W(\theta)$ $\forall \theta > \theta_1$

对 $\forall \theta_2 > \theta_1$ 考虑：

$H_0: \theta = \theta_1 \longleftrightarrow H_a: \theta = \theta_2$ (3.5)

$$\lambda_2 = \frac{L(\theta_2)}{L(\theta_1)} = \frac{S^n(\theta_2)}{S^n(\theta_1)} e^{(Q(\theta_2) - Q(\theta_1))\sum_1^n V(x_k)}$$

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n) \ \sum_1^n V(x_k) > c\} = \{(x_1 \cdots x_n) \ \lambda_2 > \lambda_0''\}$

for some constant λ_0''

结合 N-P引理及(3.2)知 W_0是(3.5)的水平为α的UMP否--

再由 $\rho_W(\theta_1) \le \sup_{\theta \le \theta_1} \rho_W(\theta) \le \alpha$

得: $\rho_{W_0}(\theta_2) \ge \rho_W(\theta_2)$

$H_0: \theta \ge \theta_1 \longleftrightarrow H_a: \theta < \theta_1$

例: $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2已知

$H_0: \mu \le \mu_0 \longleftrightarrow H_a: \mu > \mu_0$

$Q(\mu) = \frac{\mu}{\sigma_0^2}$ $V(x) = x$.

解: $f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma_0^2}}}_{S(\mu)} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}}_{h(x)} e^{\frac{\mu}{\sigma_0^2}x}$

由Th3.1知:

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_1^n x_k > c\}$ 为水平为α的UMP否定域

其中 $\rho_{W_0}(\mu_0) = P(\sum_1^n X_k > c \mid \mu = \mu_0) = \alpha$

当$\mu = \mu_0$时 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

从而由 $\alpha = P(\sum X_k > c \mid \mu = \mu_0)$.

$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > \frac{\frac{1}{n}c - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \;\middle|\; \mu = \mu_0\right)$

$\Rightarrow$ 故 $\frac{\frac{1}{n}c - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = u_\alpha$. $\Rightarrow$ $c = n\mu_0 + \sqrt{n}\,\sigma_0 u_\alpha$

$\boxed{\text{May 21, 2024}}$ 下周结课 18周以后考试

单参 指数型分布 $f(x;\theta) = S(\theta)h(x)e^{Q(\theta)V(x)}$ $S>0$ $h \ge 0$ $Q \uparrow$

$H_0: \theta \le \theta_1 \longleftrightarrow H_a: \theta > \theta_1$

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_{k=1}^n V(x_k) > c\}$

s.t: $P(\sum_1^n V(X_k) > c \mid \theta = \theta_1) = \alpha$

$X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2已知

$H_0: \mu \le \mu_0 \leftrightarrow H_a: \mu > \mu_0$.

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_1^n x_k > n\mu_0 + \sqrt{n}\,\sigma_0 u_\alpha\}$.

P93 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma^2 = 1.21$

$H_0: \mu \le 30 \leftrightarrow H_a\ \mu > 30$

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_1^n x_k > 6 \times 30 + \sqrt{6} \times \underbrace{\sqrt{1.21}}_{1.1} \times U_{0.05}$

设$\alpha = 0.05$

例：设$X \sim N(\mu, 1)$ 检验 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_a: \mu > \mu_0$ (★1) 求UMP否定域(设水平为α)

解：由于$E\bar{X} = EX = \mu$ 从而 $\bar{X}$的观测值$\bar{x}$应$\approx \mu_0$

若H_0成立则

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \bar{x} > c\}$

s.t. $P(\bar{X} > c \mid \mu = \mu_0) = \alpha$

当$\mu = \mu_0$时 $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{1}{n})$ 从而 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{1/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

从而由 $P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{1/\sqrt{n}} > \underbrace{\frac{c - \mu_0}{1/\sqrt{n}}}_{u_\alpha} \,\middle|\, \mu = \mu_0\right) = \alpha$.

$\Rightarrow c = \mu_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} u_\alpha$

$\Rightarrow W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_{k=1}^n x_k > n\mu_0 + \sqrt{n}\, u_\alpha\}$.

下证：对任意满足 $P_W(\mu_0) \le \alpha$ 的否定域W成立 $P_{W_0}(\mu) \ge P_W(\mu)$ $\forall \mu > \mu_0$

对 $\forall \mu_1 > \mu_0$ 考虑 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_a: \mu = \mu_1$ (★2)

似然函数：$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{n}{2}\mu^2} e^{-\frac{1}{2}\sum x_k^2} e^{\mu \sum x_k}$

问题(★2)的似然比为：

$$\lambda = \frac{L(\mu_1)}{L(\mu_0)} = e^{\frac{n}{2}(\mu_1^2 - \mu_0^2)} e^{(\mu_1 - \mu_0)\sum_1^n x_k}$$

从而：$W_0 = \{x_1 \cdots x_n: \lambda > \lambda_0\}$. for some λ_0

从而由 $P_{W_0}(\mu_0) = \alpha$. 及N-P引理知：W_0是(★2)的水平为α的UMP否定域.

又由于W是(★2)的水平不超过α的否定域. 从而 $P_{W_0}(\mu_1) > P_W(\mu_1)$

这很秀.

Th ~~3.2~~ 3.3 设 X 为单参数指数型分布 型如 $f(x;\theta)=S(\theta)h(x)e^{Q(\theta)V(x)}$ $S>0$ $h\geq 0$ $Q\uparrow$ 则:

检验问题 $H_0: \theta \notin (\theta_1,\theta_2) \leftrightarrow H_a: \theta \in (\theta_1,\theta_2)$

否定域: $W_0=\{(x_1,\cdots x_n): \ C_1 < \sum_1^n V(x_k) < C_2\}$.

s.t $\rho_{W_0}(\theta_1)=\rho_{W_0}(\theta_2)=\alpha$

性质: UMP

$H_0: \theta\in[\theta_1,\theta_2] \longleftrightarrow H_a: \theta \notin [\theta_1,\theta_2]$

$W_0=\{(x_1,\cdots x_n): \ \sum_1^n V(x_k) < C_1$ 或 $\underset{\sim}{\sum_1^n V(x_k)} > C_2\}$

s.t $\rho_{W_0}(\theta_1)=\rho_{W_0}(\theta_2)=\alpha$ 已经示: V_x 就是 X.

UMPU

例3.3. $X\sim N(\theta,\sigma_0^2)$ σ_0^2 已知 $H_0: \theta\in[\theta_1,\theta_2] \longleftrightarrow H_a: \theta\notin[\theta_1,\theta_2]$

解: 由 Th3.3 UMPU 否定域为:

$W_0=\{(x_1,\cdots x_n): \ \sum_1^n x_k < C_1$ 或 $\sum_1^n x_k > C_2\}$

s.t $\rho_{W_0}(\theta_1)=\rho_{W_0}(\theta_2)=\alpha$

即 $\begin{cases} P(\sum_1^n X_k < C_1 \mid \theta=\theta_1) + P(\sum_1^n X_k > C_2 \mid \theta=\theta_1)=\alpha \\ P(\sum_1^n X_k < C_1 \mid \theta=\theta_2) + P(\sum_1^n X_k > C_2 \mid \theta=\theta_2)=\alpha \end{cases}$

$\begin{cases} \theta=\theta_1 \\ \bar{X}\sim N(\theta_1,\frac{\sigma_0^2}{n}) \\ \frac{\bar{X}-\theta_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1) \end{cases}$

标准化

用分布函数表示 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \Phi\left(\frac{\frac{1}{n}C_1-\theta_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)+1-\Phi\left(\frac{\frac{1}{n}C_2-\theta_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)=\alpha \\ \Phi\left(\frac{\frac{1}{n}C_1-\theta_2}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)+1-\Phi\left(\frac{\frac{1}{n}C_2-\theta_2}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)=\alpha. \end{cases}$

DL:

上 Most important 数学 4h

下 less import. 语言 2h+…

晚 least. 科研,工程 2h.

落

不考 §3.6 比率的假设检验

$B(1,p)$ 是比率.

一个总体情形 $X \sim B(1,p)$

1. $p \le p_0$ $p > p_0$ ✓.
2. $p \ge p_0$ $p < p_0$
3. $p = p_0$ $p \ne p_0$

问题：设 $X \sim B(1,p)$ 检验：$\underline{H_0: p \le p_0} \leftrightarrow H_a: p > p_0$

解：由于 $E\bar{X} = EX = p$

从而若 $\bar{X}$ 远大于 p_0 则拒绝 H_0

从而否定域为 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_1^n x_k \ge c\}$

且对于给定的检验水平 α，W_0 满足：

$$\sup_{p \le p_0} \rho_{W_0}(p) = \sup_{p \le p_0} P\left(\sum_1^n X_k \ge c \mid p\right) = \alpha \quad (6.1)$$

记 $T = \sum_1^n X_k$ 则 $T \sim B(n,p)$ 从而：

$$\cancel{\sup_{p \le p_0} \rho_{W_0}(p) = \sup_{p \le p_0} \sum_{k \ge c} C_n^k p^k}$$

$$P(T \ge k \mid p) = \sum_{i=1}^n C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \int_0^p x^{k-1} (1-x)^{n-k}\, dx$$

易见：$P(T \ge k \mid p)$ 关于 p ↑

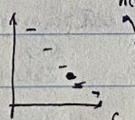
从而：由 (6.1) 知：

$$P(T \ge c \mid p_0) = \sum_{k \ge c} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} = \alpha$$

易见 对给定的 $\alpha \in (0,1)$ 不一定 ∃ c. s.t 上式成立

从而取近似：寻找使得：

$h(c_0)$. $\underbrace{\sum_{k=c_0} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k}}$ $\le \alpha$ 成立的最小整数 c_0



c.

易见这样的 c_0 存在

从而否定域为 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n): \sum_1^n x_k \ge c_0\}$

易见，$\sup_{p \le p_0} P\left(\sum_1^n X_k \ge c_0 \mid p\right) = \underline{P\left(\sum_1^n X_k \ge c_0 \mid p_0\right)} \le \alpha$

即：W_0 的检验水平不超过 α.

$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n).$ $\underbrace{t \ge c_0}\}$ 拒绝 H_0

$T = \sum_1^n X_k$. 记 T 的观测值为 t

找等价条件，去代替 c_0 刻画否定域

$t = \sum_{k=1}^n X_k$

$\underline{t \ge c_0}$ 由 c_0 定义知：$\underbrace{t \ge c_0}$ 当且仅当 $\sum_{k=t}^n C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} \le \alpha$ (6.4)

则 $h(t) \le h(c_0) \le \alpha$

从而：若 t s.t (6.4) 成立则 拒绝 H_0.

考虑关于 p 的方程 $\sum_{k=t}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \alpha$

由(4.29)知：其解为 $\underbrace{p=p(t,\alpha)}= \left(1+\frac{n-t+1}{t}F_{1-\alpha}(2(n-t+1),2t)\right)^{-1}$

(规定 $p(0,\alpha)=0$)

又由于 (6.4) 左侧关于 p_0 单增 [illegible] 从而 6.4 成立 $\Leftrightarrow p_0 \le p(t,\alpha)$.

从而：$W_0=\{(x_1\cdots x_n): t\ge c_0\}$

$=\{(x_1\cdots x_n)\ \underbrace{p(t,\alpha)\ge p_0}\}$.

则拒绝 H_0.
反之接收 H_0.

$t=\sum_{k=1}^{n} X_k$

证明：$\sum_{i=k}^{n} \underbrace{C_n^i}_{\frac{n!}{i!(n-i)!}} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$

记：$a_k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$

则由分部积分得：$a_k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{1}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Big|_0^p + \frac{n!}{k!(n-k)!}\int_0^p x^k (n-k)(1-x)^{n-k-1}\,dx$

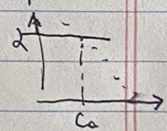
$= \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} + a_{k+1}$ $\qquad a_n = p^n$

May 24, 2024

$X\sim B(1,p)$ $\quad H_0: p\le p_0 \leftrightarrow H_a: p>p_0$ $\quad W_0=\{(x_1\cdots x_n): t\ge c_0\}$ $\quad t=\sum_1^n X_k$ $\quad c_0$: s.t $\sum_{k=c_0}^{n} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} \le \alpha$ 成立的最小整数

$t\ge c_0 \Leftrightarrow \sum_{k=t}^{n} C_n^k p_0^k (1-p_0)^k \le \alpha$ (由右图可看出)

$\Leftrightarrow p(t,\alpha) = \left(1+\frac{n-t+1}{t}F_{1-\alpha}(2(n-t+1),2t)\right)^{-1} \ge p_0$ (规定 $\underline{p(0,\alpha)=0}$)
$0<p_0$
接收 H_0



例16.1 $X=\begin{cases}1 & \text{有效}\\ 0 & \text{无效}\end{cases}$ (两点分布—检验) $\quad X\sim B(1,p)$ $\quad \underline{H_0: p\le 0.8} \leftrightarrow H_a: p>0.8$
把 $p(t,\alpha)$ 算出来

$n=30$. $t=27$ 有效. $p(27,\underline{0.05}) = \left(1+\frac{4}{27}\underbrace{F_{0.95}(8,54)}_{\text{F分布的分位数}}\right)^{-1} = 0.76 < 0.8$ 接收 H_0. 故没有超过 0.8

$p(28,0.05) = 0.814 > 0.8$ 拒绝 H_0 则超过了 0.8.

只出描述题
讲怎么做的
不要求算

两个总体情形

$X \sim B(1, p_1)$ $Y \sim B(1, p_2)$ X, Y 独立: $(X_1 \cdots X_n)$ $(Y_1 \cdots Y_m)$

1. $p_1 \le p_2$ $p_1 > p_2$

2. $p_1 \ge p_2$ $p_1 < p_2$

3. $p_1 = p_2$ $p_1 \ne p_2$

{ 正态理论方法（中心极限、样本容量足够大）
{ Fisher 精确检验法
　　　保证检验水平不超过给定α值.

正态理论方法.

1. 假设: $H_0: p_1 \le p_2 \leftrightarrow p_1 > p_2$ $p_1 \gg p_2$

解: 由于 $E\bar{X} = EX = p_1$ $E\bar{Y} = EY = p_2$

从而 若观测值 $\bar{x} \gg \bar{y}$, 则拒绝 H_0。

$(\bar{x} - \bar{y} \gg 0)$

由中心极限定理知: 标准化 $\dfrac{\bar{x} - p_1}{\sqrt{\frac{1}{n} p_1(1-p_1)}} \overset{\text{近似服从}}{\sim} N(0,1)$ $\dfrac{\bar{Y} - p_2}{\sqrt{\frac{1}{m} p_2(1-p_2)}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$

$\Rightarrow \bar{x} \overset{\cdot}{\sim} N\left(p_1, \frac{1}{n} p_1(1-p_1)\right)$ $\bar{Y} \overset{\cdot}{\sim} N\left(p_2, \frac{1}{n} p_2(1-p_2)\right)$

$\Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \overset{\cdot}{\sim} N\left(p_1 - p_2, \frac{1}{n} p_1(1-p_1) + \frac{1}{m} p_2(1-p_2)\right)$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{n}}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

点估计值

分母里也有 p_1, p_2 都不能作检验统计量. 故换成样本均值.

令 $$\xi = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{m}}}$$

可以证明, 当 m, n 足够大时, ξ 近似服从 $N(0,1)$ 分布

从而, 选取检验统计量为 $\eta = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n}\bar{X}(1-\bar{X}) + \frac{1}{m}\bar{Y}(1-\bar{Y})}}$ 则当η过大时, 拒绝 H_0

从而否定域为: $w_0 = \{(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m): \eta \ge c\}$.

且 W_0 满足 $\sup\limits_{p_1 \le p_2} P(b > c \mid (p_1, p_2)) = \alpha$

当 $p_1 \le p_2$ 时 易知 $\eta \le \xi$ 从而 $P(\eta > c \mid p_1 \le p_2) \le P(\xi > c \mid p_1 \le p_2)$

从而取近似 取 c_0 s.t $P(\underline{\xi > c_0} \mid p_1 \le p_2) = \underline{\alpha}$.

$\Rightarrow c_0 \approx u_\alpha$ 从而:

$P(\eta < c_0 \mid p_1 \le p_2) \le P(\xi < c_0 \mid p_1 = p_2) \approx \alpha$.

从而: $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) : \eta > u_\alpha\}$.

构造统计量：出现在否定域中 $\underline{\xi}$ η $W_0 = \{(\cdots), \underset{\sim}{\eta} > c_0\}$ 的近似值用ξ的分布.

$\xi \ge \eta$. $\sim N(p_1 - p_2, \cdots)$.

2. 检验 $H_0: p_1 \ge p_2 \longleftrightarrow H_a: p_1 < p_2$

解: 选取检验统计量为 $\eta = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}\bar{x}(1-\bar{x}) + \frac{1}{m}\bar{y}(1-\bar{y})}}$

否定域为 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n ; y_1 \cdots y_m) : y < c\}$

s.t $\sup\limits_{p_1 \ge p_2} P(y < c \mid (p_1, p_2)) = \alpha$. $\underline{\eta}$的分布:依赖参数. 故引入第2个统计量求c.

令 $\xi = \dfrac{\bar{x} - \bar{y} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}\bar{x}(1-\bar{x}) + \frac{1}{m}\bar{y}(1-\bar{y})}}$ 第1个统计量.

则 当 $m, n \gg 1$ 时, $\xi \dot\sim N(0,1)$.

且当 $p_1 \ge p_2$ 时 $\xi \le \eta$

从而: $P(\eta < c \mid p_1 \ge p_2) \le \underline{P(\xi < c \mid p_1 \ge p_2)}$.

取近似: 找 c_0 s.t $P(\xi < c_0 \mid p_1 \le p_2) = \alpha$. 则 $c_0 \approx u_{1-\alpha}$.

从而: $P(\eta < u_\alpha \mid p_1 \ge p_2) \le P(\xi < u_\alpha \mid p_1 \ge p_2) \approx \alpha$.

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) : \eta < u_{1-\alpha}\}$.

3. 检验 $H_0: p_1 = p_2 \leftrightarrow H_a: p_1 \neq p_2$

解: 想法: 当 H_0 为真时，易见 $\bar{X} \stackrel{\cdot}{\sim} N(p_1, \frac{1}{n}p_1(1-p_1))$

$$\bar{Y} \stackrel{\cdot}{\sim} N(p_1, \frac{1}{m}p_1(1-p_1))$$

从而 $$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n}p_1(1-p_1)+\frac{1}{m}p_1(1-p_1)}} \stackrel{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

$$(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})\underline{p_1}(1-\underline{p_1})$$

不能作检验统计量.

$E\bar{X} = p_1 = E\bar{Y}$

$(X_1 \cdots X_n)$ $(Y_1 \cdots Y_m)$

$(X_1 \cdots Y_m)$.

$\frac{1}{n+m}(\sum X_k + \sum Y_k)$.

$\frac{1}{n+m}(n\bar{X} + m\bar{Y})$.

p_1 替换为 $\hat{p} := \frac{1}{m+n}(n\bar{X}+m\bar{Y})$

从而得到 $$G := \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})\hat{p}(1-\hat{p})}}$$

可以证明: 当 $m, n \gg 1$ 时, $G \stackrel{\cdot}{\sim} N(0,1)$

当 H_0 为真

从而否定域为 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n; y_1 \cdots y_m): |G| > c\}$

s.t. $P(|G| > c \mid H_0 \text{为真}) = \alpha$

$$c \approx u_{\frac{\alpha}{2}}$$

从而取 $W_0 = \{(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) \quad |G| > u_{\frac{\alpha}{2}}\}$

[课后题 3.]

X $(n=1)$

找 W s.t. $\beta_W(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta \le 3 \\ 1 & \theta \ge 4. \end{cases}$

样本 $X \sim U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$

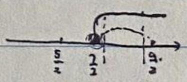
从而 $P(X \in (\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})) = 1$

即构造否定 W. s.t. $P(X \in W \mid \theta \le 3) = 0$ 补集 从区间角度看.

$P(X \in W \mid \theta \ge 4) = 1$ 子集.

$\theta \le 3.$ $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$

$\theta = 4$ $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$



$P(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}) = 1.$

W 在 $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ 右侧.

W $[\frac{7}{2}, +\infty)$

題4.] X. $f(x) \left\langle \begin{array}{ll} f_0(x) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} & [0,1] \\ f_1(x) = \begin{cases} 2x \\ 0 \end{cases} & [0,1] \end{array} \right.$ X. $H_0 \longleftrightarrow H_a$. $\alpha = 0.1$. β, 一致最大功效.

(似然比檢驗法).

$x_1 \quad n=1 \qquad L(f; x_1) = f(x_1)$

$$\lambda = \frac{L(f_1; x_1)}{L(f_0; x_1)} = \frac{f_1(x_1)}{f_0(x_1)} = 2x \qquad x_1 = \mathcal{X} = [0,1]$$

$$w_0 = \{ x_1 \in [0,1] : \quad 2x_1 > \lambda_0 \}.$$

$$P\left(\cancel{2}x_1 > \frac{\lambda_0}{2} \,\middle|\, f = f_0 \right) = 0.01.$$

$$= \int_{\frac{\lambda_0}{2}}^{1} f_0(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}\lambda_0}^{1} 1\,dx \qquad \underline{\lambda_0 = 1.8}$$

$$w_0 = \{ x_1 \in [0,1] : x_1 > 0.9 \}.$$

$$P(\text{取伪}) = 1 - P(x_1 > 0.9 \mid f = f_1)$$

$$= 1 - \int_{0.9}^{1} 2x_1\,dx_1 = 0.81$$

Fisher精确检验 不要求是大样本

$X \sim B(1, p_1)$ $Y \sim B(1, p_2)$

X, Y 独立 $(X_1 \cdots X_n)$ $(Y_1 \cdots Y_m)$ $\varphi_1 = \sum_1^n X_k$ $\varphi_2 = \sum_1^m Y_k$.

观测值 $(x_1 \cdots x_n)$ $(y_1 \cdots y_m)$ $S_1 = \sum_1^n x_k$ $S_2 = \sum_1^m y_k$

$$t = S_1 + S_2$$

已知信息: S_1 S_2 t

1. 检验 $H_0: p_1 \le p_2 \leftrightarrow H_a: p_1 > p_2$

想法: 在 $S_1 + S_2 = t$ 的条件下, 若 $p_1 \le p_2$, 则观测值 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 中 "1" 较少

~~从而~~即: S_1 较小 从而当 S_1 过大时, 拒绝 H_0 从而否定域的形式为

$$W_0 = \{(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) : S_1 \ge C\}$$

W_0 应满足 检验水平

$$\sup_{p_1 \le p_2} P(\varphi_1 \ge C \mid \varphi_1 + \varphi_2 = t) = \alpha.$$

可以证明 $\sup_{p_1 \le p_2} P(\varphi_1 \ge C \mid \varphi_1 + \varphi_2 = t) = \sum_{i=C}^{n} P(i; n, m, t)$.

其中: $P(i; n, m, t) = \dfrac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{n+m}^t}$ 超几何分布.

$$\text{从而} \quad \sum_{i=C}^{n} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t} = \alpha$$

取近似 设 C_0 为满足 $\sum_{i=C_0} \dfrac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t} \le \alpha$ 的最~~小~~ 整数

则 $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m) : S_1 \ge C_0\}$.

检验水平 $\le \alpha$. $\sup_{p_1 \le p_2} P(\varphi_1 \ge C_0 \mid \varphi_1 + \varphi_2 = t)$

$$S_1 \ge C_0 \iff \sum_{i=S_1}^{n} P(i; n, m, t) \le \alpha$$

$$\Rightarrow W_0 = \{(x_1 \cdots y_m) : \sum_{i=S_1}^{n} P(i; n, m, t) \le \alpha\}.$$

$$P(i+1, n, m, t) = P(i, n, m, t) \frac{(n-i)(t-i)}{(i+1)(m-t+i+1)}$$

2. 检验. $H_0\ p_1 \geq p_2 \leftrightarrow H_a\ p_1 < p_2$.

解: 类似于情形 1 ~~有S_1较小时~~

从而: $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m): S_1 \leq C\}$.

W_0 满足: $\sup_{p_1 \geq p_2}$ ~~$P(\cdots)$~~

$P(\varphi_1 < C \mid \varphi_1 + \varphi_2 = t) \, \alpha$.

可以证明: $\sup_{p_1 \geq p_2} P(\varphi_1 \leq C \mid \varphi_1 + \varphi_2 = t) = \sum_{i=0}^{C} P(c, n, m, t) = \sum_{i=0}^{C} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t}$

从而 $\sum_{i=0}^{C} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{n+m}} = \alpha$.

取近似: 设 C_0 为满足 $\sum_{i=0}^{C_0} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t} \leq \alpha$ 的最大整数.

$W_0 = \{(x \cdots y, \ S_1 \leq C_0\}$.

$S_1 \leq C_0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{S_1} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t} \leq \alpha$.

$\Rightarrow W_0 = \{(x_1 \cdots y_m): \sum_{i=0}^{S_1} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t} \leq \alpha\}$ ☆2.

1. H_0 ...

2. H_0 ... 互换 $p_1 p_2$ 即可...

1. $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m) \sum_{i=S_1}^{n} P(i, n, m, t) \leq \alpha\}$

2. $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m): \sum_{i=S_2}^{m} P(i, m, n, t) \leq \alpha\}$. ☆2.

下证: $\sum_{i=0}^{S_1} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{m+n}^t} = \sum_{i=S_2}^{m} \frac{C_m^i C_n^{t-i}}{C_{m+n}^t}$ 右边 $\xlongequal{t-i=j} \sum_{j=t-m}^{S_1} \frac{C_m^{t-j} C_n^j}{C_{m+n}^t}$

若 $t-m > 0$ 则对 $\forall i = 0, t, \cdots, m-1$

有 $t-i \geq m+1 > m$ 从而 $C_m^{t-i} = 0$. 左边 $= \sum_{i=t-m}^{S_1} \cdots =$ 右边

70

3. 检验 $H_0: p_1 = p_2 \leftrightarrow H_a: p_1 \neq p_2$ $\frac{s_1}{n}$ $\frac{s_2}{m}$

解: 在 $s_1+s_2=t$ 的条件下 若 H_0 为真

$$\frac{s_1}{n} \approx \frac{s_2}{m}$$

从而 在 $s_1+s_2=t$ 的条件下有 $\frac{s_1}{n} \approx \frac{s_2}{m} = \frac{t-s_1}{m}$

从而 $s_1 \approx \frac{nt}{m+n}$

从而 当 s 过大或过小时 拒绝 H_0

从而 $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m): s_1 \leq c_1 \text{ 或 } s_1 \geq c_2\}$

W_0 满足: $\sup\limits_{p_1=p_2} [p(\varphi_1 \leq c_1 \mid \varphi_1+\varphi_2=t) + P(\varphi_1 \geq c_2 \mid \varphi_1+\varphi_2=t)] = \alpha$.

可以证明: $\sum\limits_{i=0}^{c_1} p(i, n, m, t)$ $\sum\limits_{i=c_2}^{n} p(i, n, m, t)$

取近似: 设 c_1 为满足 $\sum\limits_{i=0}^{c_1} p(i,n,m,t) \leq \frac{\alpha}{2}$ 的最大整数.

设 $c_{2,0}$ 为满足 $\sum\limits_{i=c_{2,0}}^{n} p(i,n,m,t) \leq \frac{\alpha}{2}$ 之最小整数.

则: $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m).\ s_1 \leq c_{1,0} \text{ 或 } s_2 \geq c_{2,0}\}$.

易见: $\leq \sup\limits_{p_1=p_2} [p(\varphi_1 \leq c_{1,0} \mid \varphi_1+\varphi_2=t) + \sup\limits_{p_1=p_2} p(\varphi_1 \geq c_{2,0} \mid \varphi_1+\varphi_2=t)]$

$p + p$

$= \Sigma \cdots + \Sigma \cdots$

$\leq \alpha$.

且 $W_0 = \{(x_1 \cdots y_m)\ \Sigma \cdots = \frac{\alpha}{2}$ 或 $\Sigma \leq \frac{\alpha}{2}$.

$W_0 = \{(x_1 \cdots y_m)\ \sum\limits_{i=0}^{s_1} p(i,n,m,t) \leq \frac{\alpha}{2}$ 或 $\sum\limits_{i=s_1}^{n} p(i,n,m,t) \leq \frac{\alpha}{2}\}$.

例6.3. $X = \begin{cases} 1 & \text{第一组侦破成功} \\ 0 & \text{未侦破} \end{cases}$ $\quad Y = \begin{cases} 1 & \text{第二组侦破成功} \\ 0 & \text{未侦破} \end{cases}$

$X \sim B(1, p_1) \qquad Y \sim B(1, p_2)$

$H_0: p_1 = p_2 \longleftrightarrow H_a: p_1 \neq p_2$

$w_0 = \{ (x_1 \cdots y_m) \ \sum_{i=0}^{s_1} p(i, n, m, t) \leq \frac{\alpha}{2}$

或 $\sum_{i=s_1}^{n} p(i, n, m, t) \leq \frac{\alpha}{2} \}$.

$n = 25 \quad s_1 = 23 \quad m = 35 \quad s_2 = 30 \quad t = 53.$

$$\sum_{i=0}^{23} \frac{C_{25}^{i} C_{35}^{53-i}}{C_{60}^{53}} = 0.878 > 0.025$$

$$\sum_{i=23}^{25} \frac{C_{25}^{i} C_{35}^{53-i}}{C_{60}^{53}} = 0.374 > 0.025.$$

$H_0: f(x) = f_0(x) \longleftrightarrow H_a: f(x) = f_1(x).$

习题2: w: $P(\text{弃真}) = \rho_w(f_0) = \iint_w \prod_{k=1}^{n} f_0(x_k)\, dx_1 \cdots dx_n$

$P(\text{取伪}) = 1 - \rho_w(f_1) = 1 - \iint_w \prod_{k=1}^{n} f_1(x_k)\, dx_1 \cdots dx_n.$

$L(f) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k).$ $\qquad \lambda = \frac{L(f_1)}{L(f_0)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_1(x_k)}{f_0(x_k)}$ $\qquad w = \{ (x_1 \cdots x_n) \ \prod_{k=1}^{n} \frac{f_1(x_k)}{f_0(x_k)} > \lambda_0 \}.$

1. $X \sim B(1, p) \quad H_0: p = \frac{1}{2} \longleftrightarrow H_a: p = \frac{3}{4}$

$w = \{ (x_1, x_2, x_3) \ \sum_{1}^{3} x_k \geq 2 \}.$

记 $\varphi = x_1 + x_2 + x_3$ 则 $\varphi \sim B(3, p)$

所以 $\rho_w(p)$ $\quad p \in \{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \}.$

$\rho_w(\frac{1}{2}) = P(\varphi \geq 2 \mid p = \frac{1}{2})$

$= P(\varphi = 2 \mid p = \frac{1}{2}) + P(\varphi = 3 \mid p = \frac{1}{2})$

$= C_3^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^1 + C_3^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{2}$ $\qquad \rho_{\text{弃真}} = \frac{1}{2}$

$\rho_w(\frac{3}{4}) = P(\varphi = 2 \mid p = \frac{3}{4}) + P(\varphi = 3 \mid p = \frac{3}{4})$ $\qquad \rho_{\text{取伪}} = 1 - \frac{27}{32} = \frac{5}{32}.$

$= C_3^2 (\frac{3}{4})^2 \cdot (\frac{1}{4}) + C_3^3 (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{\ }$